EINE UNTERSUCHUNG ÜBER DAS VERHALTEN DER VERALLGEMEINERTEN EIGENVEKTOREN EINES SCHRÖDINGERSCHEN OPERATORS IM UNENDLICHEN

GEORG MIRMIKLIS

1972

Dissertationsdruck- und Verlagsanstalt
Werner Blasaditsch · 89 Augsburg · Theodor-Heuß-Platz 3 · Tel. (0821) 25563

EINE UNTERSUCHUNG ÜBER DAS VERHLATEN DER VERALLGEMEINERTEN EIGENVEKTOREN EINES SCHRÖDINGERSCHEN OPERATORS IM UNENDLICHEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von Georg Mirmiklis im November 1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Wienholtz

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Kastrup

Tag der mündlichen Prüfung: 15. 2. 1972

INHALT

		Seite
I.	Einleitung	1
II.	Spektralanalysis	6
III.	Über die Räume L^{μ}	13
IV.	Über die Räume H^{μ}	20
V.	Einbettungssätze	25
VI.	Über das Produkt von Distributionen	31
VII.	Über die Räume $H^{(\mu,\pi)}$	37
VIII.	Über die Selbstadjungiertheit eines Schrödingerschen Operators	50
IX.	Verallgemeinerte Eigenvektoren eines Schrödingerschen Operators	57
X.	Verhalten der Verallgemeinerten Eigenvektoren eines Schrödingerschen Operators im Unendlichen	61
	Literatur	75

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546014_0085

I. EINLEITUNG

Wir werden in der Einleitung erstens die zur Untersuchung gegebene Frage bringen. Zweitens werden wir den Weg, den wir beschritten haben, um die Frage zu beantworten, skizzieren und verteidigen. Drittens wird Inhalt und Zusammensetzung der nächsten Paragraphen angegeben.

Unser Problem war: Bei der Lösung der Schrödingerschen Eigenwertgleichung

$$\left(-\Delta + q(x)\right) f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

bekommt man Lösungen $f_\lambda(x)$, bei denen λ weder dem diskreten noch dem kontinuierlichen Spektrum des selbstadjungierten Schrödingerschen Operators $(-\Delta+q(x))$ auf L_2 angehört. Wie kann man die Eigenlösungen, die dem Spektrum angehören von denen, die es nicht tun, unterscheiden? In den Lehrbüchern der Quantenmechanik (siehe z.B. Blochinzew [4], S. 77) ist als Kriterium für die Unterscheidung dieser Lösungen folgende Behauptung aufgestellt: Die Wellenfunktion $f_\lambda(x)$ muß beschränkt sein. Das soll nicht nur für die Eigenlösungen des Schrödingerschen Operators gelten, sondern für die jeder Observablen, falls sie regulär sind.

Die Lösung des Problems haben wir in einer neuen Formulierung des Spektralsatzes gesehen, wo die Eigenvektoren, die dem kontinuierlichen Spektrum angehören, lineare stetige Funktionale auf einem Unterraum des Hilbert-Raumes der quadratintegrierbaren Funktion sind. Diese Theorie ist in den letzten Jahren von

einigen Mathematikern behandelt worden. Die uns bekannten Arbeiten sind Gelfand-Schilow [8], Gelfand-Wilenkin [9], Foias [6], [7] und Berezanskii [3]. Da die von Berezanskii entwickelte Theorie umfassender und der Behandlung von Differential Operatoren angepaßt ist, bringen wir hier nur diese:

H_+, H_0, H_- seien drei Hilbert-Räume mit folgenden Eigenschaften:

(i) $H_+ \subset H_0 \subset H_-$, $\|\cdot\|_+ \geq \|\cdot\|_0 \geq \|\cdot\|_-$ $\forall u \in H_+$
und dicht in

(ii) H_+ liegt dicht in H_0

(iii) H_- ist der Duale von H_+

(iv) Für jede orthonormierte Basis $\{u_i\}$ in H_+ gilt: $\sum_i \|u_i\|_0 < \infty$

Sei noch Φ ein dichter Unterraum von H_+ mit stärkerer oder gleicher Topologie als H_+. A sei ein selbstadjungierter oder Hermitescher Operator in H_0 mit $\Phi \subseteq \mathfrak{D}(A^*)$ und die Topologie von Φ so, daß die Einschränkung des Operators A auf Φ einen stetigen Operator von $\Phi \longrightarrow H_+$ definiert. Dann existiert ein nichtnegatives endliches Maß $d\rho(\lambda)$ definiert auf den Borelschen Mengen der reellen Achse und eine ρ-fast überall definierte Operator-Funktion $P(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, deren Werte Hilbert-Schmidt-Operatoren von H_+ nach H_- sind, so daß für jede Borelsche Menge Δ gilt:

$$E(\Delta)u = \int_\Delta P(\lambda)u \, d\rho(\lambda) \qquad \forall u \in H_+$$

wobei $E(\Delta)$ die Spektral-Zerlegung der Einheit von A ist (oder die verallgemeinerte Spektral-Zerlegung von A, falls A ein Hermitescher Operator ist).

Der Wertebereich von $P(\lambda)$, $\mathcal{R}(P(\lambda))$, besteht aus verallgemeinerten Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ . (Die Definition des verallgemeinerten Eigenvektors bringen wir im zweiten Paragraphen).

Die anderen Autoren nehmen H_+ als einen nuklearen Raum und verlangen, daß der Operator A in H_+ stetig ist. Diese letzte Form des Theorems benutzen auch Roberts [13] und Antoine [1], [2] um den Dirac-Formalismus der Quantenmechanik mathematisch zu rechtfertigen. Dabei ist H_+ als die Menge der realisierbaren Zustände des Systems und H_- als die der möglichen Zustände identifiziert. Antoine verlangt, daß H_+ invariant unter allen Observablen und Symmetrien ist und meint, H_+ soll für jedes System anders sein, d.h. H_+ charakterisiert das System. Nach unserer Meinung bräuchte das nicht der Fall zu sein. Die Gründe sind folgende:

(i) Wenn H_+ invariant bei der Anwendung des Impuls- und Ortsvektors bleibt, dann soll er aus Funktionen bestehen, die unendlich oft differenzierbar sind, und die stärker als jedes Polynom im Unendlichen gegen Null streben. In diesem Fall aber wird H_- sehr groß sein und also viel mehr Lösungen enthalten als die in der Physik brauchbaren.

(ii) H_+ braucht nach Berezanskii nicht nuklear zu sein.

(iii) Der Raum H_+ charakterisiert nicht ein bestimmtes Quantensystem, sondern allgemein ein Quantensystem und hat zu tun mit der Möglichkeit, die Zustände in realisierbare und nicht realisierbare zu unterscheiden. Deshalb braucht er nicht invariant bei der Anwendung von Observablen zu sein. Das bestimmte System könnte von dem Raum Φ charakterisiert werden.

Der Inhalt der nächsten Paragraphen ist folgender:

Im II. Paragraph ist die Spektralanalysis von linearen Hermiteschen Operatoren in der Form von Berezanskii [3] skizziert.

Im dritten und vierten Paragraph sind die Räume L^M, die aus Funktionen $u(\xi)$ bestehen mit $u(\xi)M(\xi) \in L_2$, wobei $M(\xi)$ eine Gewichtsfunktion ist und die Räume H^M, die gleich $\mathcal{F}^{-1}(L^M)$ sind, wobei $\mathcal{F}^{-1}$ die inverse Fourier-Transformation ist, soweit behandelt, wie es für uns notwendig war.

Der fünfte Paragraph enthält einige Einbettungssätze zwischen den Räumen H^M und H^N, L_p, und C^m. Der ganze Inhalt der Paragraphen 3 - 5 ist ein Teil einer Arbeit von Volevich-Panejakh [16]. Wir haben es hier gebracht, weil die von uns unten konstruierten Räume eine Umformung dieser Räume sind.

Im sechsten Paragraph beweisen wir einige Sätze über das Produkt von Distributionen. Dabei sind nur solche Behauptungen bewiesen, die wir für die Anwendung eines Operators auf die Distributionsräume H^M brauchen und für die Umformung des Raumes H^M.

In Paragraph sieben behandeln wir die Räume $H^{(M,\pi)}$, die aus allen Distributionen u bestehen mit der Eigenschaft $\pi(x)u \in H^M$ wobei $\pi(x)$ eine monotone stetige Funktion ist, und die Multiplikation $\pi(x)u$ im Distributionssinne zu verstehen ist. Es ist auch bewiesen worden, daß es Funktionen $M(\xi)$ und $\pi(x)$ gibt, so daß die Einbettung $H^{(M,\pi)} \longrightarrow L_2$ vom Hilbert-Schmidt-Typ ist, was die Definition dieser Räume rechtfertigt. Dieser Raum $H^{(M,\pi)}$ wird als der Raum der realisierbaren Zustände eines Quantensystems identifiziert.

Im achten Paragraph ist die Selbstadjungiertheit eines Schrödingerschen Operators in Räumen der Form H^M und $H^{(M,\pi)}$ behandelt.

Das bräuchte man, wie wir in dem obigen Spektralsatz gesehen haben, nicht. Wir haben es aber der Vollständigkeit halber getan.

Im neunten Paragraph ist bewiesen, daß jede Eigenlösung des Schrödingerschen Operators, die als reguläre Distribution in $H^{(\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi})}$ enthalten ist, eine verallgemeinerte Eigenlösung des Operators ist.

Im letzten Paragraph sind einige Sätze über das Verhalten von diesen verallgemeinerten Eigenlösungen, falls sie regulär sind. Die Ergebnisse der letzten zwei Paragraphen kann man auch für beliebige Differentialoperatoren beweisen.

Nach Paragraph neun ist das Verhalten der Fourier-Transformation jeder verallgemeinerten Eigenlösung bekannt. Für die verallgemeinerte Eigenlösung selbst aber ist es für den allgemeinen Fall nicht bewiesen. Die wichtigste Frage aber ist nach unserer Meinung, ob der Meßprozeß der Quantenmechanik mit der Raum-Tripel-Beschreibung vereinbart ist. In diesem Fall sollte man das Raumtripel mit Hilfe von physikalischen Forderungen festsetzen.

II. SPEKTRALANALYSIS

1. Einführung

Für jeden selbstadjungierten Operator in einem n-dimensionalen euklidischen Raum existiert ein vollständiges System von Eigenvektoren des Operators. Das gilt bekanntlich für selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbert-Raum nicht mehr. Es gibt selbstadjungierte Operatoren in L_2, die keinen Eigenvektor in L_2 haben. Ein solches Beispiel ist der selbstadjungierte Operator $i\frac{d}{dx}$ im Raum $L_2(-\infty, \infty)$. Eine Eigenfunktion dieses Operators müßte der Gleichung

$$i\frac{d}{dx}y(x) = \lambda y(x)$$

genügen. Diese hat aber als Lösungen nur die Funktionen

$$y(x) = c\, e^{i\lambda x}$$

die für $c \neq 0$ nicht zum Raum $L_2(-\infty, \infty)$ gehören. Als anderes Beispiel kann der Operator der Multiplikation mit x im Raum $L_2(a, b)$ dienen. In diesem Fall sollte gelten

$$x\,y(x) = \lambda\, y(x) \qquad \text{also} \qquad \int_a^b |x-\lambda|^2\, |y(x)|^2 dx = 0$$

Daraus folgt, $y(x) = 0$ f.ü., also $y = 0$.

Diese Eigenlösungen sind bekanntlich dem kontinuierlichen Spektrum des Operators zugeordnet und sind im allgemeinen singuläre Distributionen. Um ihre Eigenschaften zu untersuchen, versucht man sie als Elemente eines Raumes zu deuten. Das

erreicht man, indem man in einem Raumtripel arbeitet .
(siehe: [3], [9]).

Wir werden unten die notwendigen Definitionen und Sätze, die man bei der Spektralzerlegung eines Operators in einem Raumtripel braucht, ohne Beweis bringen.

2. Raumtripel

(2.1) Definition: Ein System von drei Hilbert-Räumen H_+, H_0, H_- mit entsprechenden skalaren Produkten $(\ ,\ )_+$, $(\ ,\ )_0$ und $(\ ,\ )_-$ heißt Raumtripel, wenn folgendes gilt:

(i) $H_+ \subset H_0 \subset H_-$; $\|u\|_+ \geq \|u\|_0 \geq \|u\|_-$ $\forall u \in H_+$

(ii) Jeder dieser Räume ist dicht im nachfolgenden

(iii) H_- ist der Duale von H_+.

Bemerkung: Die obige Definition des Raumtripels ist nach Berezanskii [3]. Die Autoren Gelfand-Schilow [8], Gelfand-Wilenkin [9] und Foias [6] verlangen noch, daß H_+ ein nuklearer abzählbar-Hilbertscher Raum ist. Das ist aber für die Spektralanalysis wie wir unten sehen werden nicht notwendig.

Vereinbarung: Das Raumtripel, das in der Spektralanalysis vorkommt, muß noch folgende Eigenschaften haben:

(i) H_+ , H_0 , H_- sind separable Hilbert-Räume

(ii) Die Einbettung $H_+ \longrightarrow H_0$ ist vom Hilbert-Schmidt-Typ, d.h. für jede orthonormierte Basis $\{u_i\} \subset H_+$ gilt : $\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|_0^2 < \infty$.

Wenn wir im folgenden von Raumtripeln sprechen, so schließt das diese Vereinbarung ein, außer wenn ausdrücklich daraufhingewiesen wird.

3. Verallgemeinerte Eigenvektoren

Bei der Definition eines verallgemeinerten Eigenvektors benutzt Berezanskii folgenden Satz (siehe [3], S. 33):

> Satz: Für jedes Raumtripel $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ kann man ein "skalares Produkt" für $\alpha \in H_-$ und $u \in H_+$ definieren, so daß es mit dem Produkt $(\,;)_0$ übereinstimmt, falls $\alpha \in H_0$ ist. Für dieses Produkt gilt
>
> $$|(\alpha, u)_0| \leq \|\alpha\|_- \cdot \|u\|_+ \qquad \forall\, \alpha \in H_- \,, \forall\, u \in H_+$$

Wir bringen jetzt erstens eine Hilfsdefinition:

> (2.2) Definition: Sei $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ ein Raumtripel und Φ ein topologischer Raum mit den Eigenschaften:
>
> (i) $\Phi \subseteq H_+$ topologisch,
>
> d.h. Φ Unterraum von H_+ und die Topologie von Φ ist stärker als die von H_+ auf Φ induzierte Topologie.
>
> (ii) Φ ist dicht in H_+.

Sei A ein Operator in H_0, nicht unbedingt selbstadjungiert und $\Phi \subseteq \mathfrak{D}(A^*)$. Sei noch $\mathfrak{D}(A)$ dicht in H_+ und die Einschränkung von A^* auf Φ definiert einen stetigen Operator von Φ nach H_+. Dann sagt man: A erlaubt "an extension of the equipment".

Nach diesen Vorbereitungen geben wir folgende Definition:

(2.3) Definition: A sei ein Operator in H_0 der "an extension of the equipment" im Raumtripel $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ erlaubt. Dann heißt ein Vektor $\varphi \in H_-$ verallgemeinerter Eigenvektor des Operators A mit zugehörigem Eigenwert λ, wenn die Gleichung

$$(\varphi,\ (A^* - \bar{\lambda})u)_0 = 0 \qquad \forall\ u \in \Phi$$

gilt.

Bemerkung: Bei Gelfand-Wilenkin [9] ist $\varphi \in H_-$ ein verallgemeinerter Eigenvektor von A, wenn $(\varphi, (A-\lambda)u) = 0\ \forall\ u \in H_+$, wobei $(\ ,\ )$ die Anwendung des Funktionals φ auf $(A-\lambda)u$ bedeutet. Dabei ist $A : H_+ \longrightarrow H_+$ stetig angenommen. In dem von uns konstruierten Raumtripel stimmen beide Definitionen überein.

Die Definition des verallgemeinerten Eigenvektors hat mit der Fortsetzung des Operators zu tun: Aus der Stetigkeit des Operators $A^* : \Phi \longrightarrow H_+$ folgt die Existenz eines stetigen Operators $A^{*+} : H_- \longrightarrow \Phi'$, wobei Φ' der duale Raum von Φ ist, der aus folgender Gleichung definiert ist:

$$(A^{*+}\alpha, u)_0 = (\alpha, A^* u)_0 \qquad \forall\ \alpha \in H_-,\ u \in \Phi$$

Der Operator A^{*+} stimmt in $\mathfrak{D}(A)$ mit A überein:

$$(A^{*+} f, u)_0 = (f, A^* u)_0 = (Af, u)_0 \qquad \forall\ f \in \mathfrak{D}(A),\ \forall\ u \in \Phi$$

d.h. $A \subseteq A^{*+}$

Die Definition eines verallgemeinerten Eigenvektors lautet jetzt:

$\varphi \in H_-$ ist verallgemeinerter Eigenvektor des Operators A mit zugehörigem Eigenwert λ, wenn $A^{*+}\varphi = \lambda\varphi$ gilt.

4. Entwicklungssatz:

Der Hauptsatz der Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenvektoren der im Buch von Berezanskii [3] als Theorem 2.1 des Kapitels V, § 2, vorkommt, lautet:

Satz: Sei $H_+ \subseteq H_0 \subseteq H_-$ ein Raumtripel. Für einen beliebigen selbstadjungierten Operator A in H_0 existiert ein nichtnegatives endliches Maß $d\rho(\lambda)$ definiert auf den Borelschen Mengen der reellen Achse und eine ρ-fast überall definierte Operator-Funktion $P(\lambda)$, $(-\infty < \lambda < \infty)$, deren Werte Hilbert-Schmidt-Operatoren von H_+ nach H_- sind, wobei

$$\|P(\lambda)\| \leq 1 \quad , \quad (P(\lambda)u, u)_0 \geq 0 \qquad \forall\, u \in H_+$$

so daß die Parseval-Gleichung gilt:
für eine beliebige Borelsche Menge Δ und für die Zerlegung der Einheit $E(\Delta)$, die dem Operator A zugeordnet ist, die Integral-Darstellung

$$E(\Delta) = \int_\Delta P(\lambda)\, d\rho(\lambda)$$

konvergiert in der Hilbert-Norm $(\|\cdot\|)$.
Sei $\Phi \subseteq H_+$ ein dichter topologischer linearer Raum, so daß $\Phi \subseteq \mathfrak{D}(A)$ und $A : \Phi \to H_+$ stetig. Dann besteht $\mathfrak{R}(P(\lambda))$ aus verallgemeinerten Eigenvektoren mit dem Eigenwert λ.

Wenn es für ein Raumtripel $H_+ \subseteq H_0 \subseteq H_-$ $\rho(\Delta)$ und $P(\lambda)$ für jeden selbstadjungierten Operator in H_0 gibt, die die obigen Eigenschaften haben, dann ist die Einbettung $H_+ \longrightarrow H_0$ notwendig vom Hilbert-Schmidt-Typ.

Der obige Satz gilt nicht nur für selbstadjungierte Operatoren in H_0, sondern auch für Hermitesche Operatoren, wobei in diesem Fall $E(\Delta)$ die verallgemeinerte Zerlegung der Einheit des betrachteten Operators ist.

Bemerkung: Im Falle, wo man nur mit einem Operator zu tun hat, braucht der Einbettungsoperator $H_+ \longrightarrow H_0$ nicht vom Hilbert-Schmidt-Typ zu sein. (siehe Berezanskii [3] Seite 327 und 350)

III ÜBER DIE RÄUME L^μ.

Unter einer Gewichtsfunktion $\mu(\xi)$ werden wir eine auf $\mathbb{R}_n$ definierte, stetige Funktion verstehen, die folgende Eigenschaft hat: Es gibt Konstanten $c>0$ und $\ell>0$, die nur von der Gewichtsfunktion $\mu(\xi)$ abhängen, so daß

$$c^{-1}(1+|\xi|^\ell)^{-1} \le \mu(\xi) \le c(1+|\xi|^\ell) \quad \forall \quad \xi \in \mathbb{R}_n$$

Mit Hilfe von solchen Funktionen werden folgende Räume definiert:

(3.1) Definition: Sei $\mu(\xi)$ eine Gewichtsfunktion.
L^μ ist der Raum der komplexwertigen messbaren Funktionen $u(\xi)$ auf $\mathbb{R}_n$, für die das Integral

$$\int_{\mathbb{R}_n} |u(\xi)|^2 \mu^2(\xi) d\xi =: \|u\|^2_\mu < \infty$$

ist. $\|\cdot\|_\mu$ definiert eine Norm in L^μ.
(Die letzte Behauptung ist trivial).

(3.2). Satz: a) $\chi : L^\mu \ni u \longmapsto \mu u \in L_2 \Rightarrow$
χ ist ein isometrischer Isomorphismus.
b) Die Räume L^μ und $L^{\frac{1}{\mu}}$ sind bezüglich der Bilinearform $\int u(\xi)\overline{v(\xi)}d\xi$ zueinander dual.

Beweis: a) Man muß zeigen, daß die Abbildung χ eine bijektive Abbildung ist, daß χ linear und daß ferner $\|\chi(u)\|_{L_2} = \|u\|_\mu$ gilt. Das ist jedoch trivial.

b) Wir zeigen erstens, daß jede Funktion $f(\xi) \in L^{\frac{1}{\mu}}$ ein lineares stetiges Funktional φ_f auf L^μ definiert. Für

$f(\xi) \in L^{\frac{1}{\mu}}$ definieren wir:

$$\varphi_f(u) := \int \overline{f(\xi)}\, u(\xi)\, d\xi$$

Die Linearität von φ_f ist trivial, und die Stetigkeit folgt aus der Ungleichung von Schwarz:

$$\left| \int \overline{f(\xi)}\, u(\xi)\, d\xi \right| \leq \|f\|_{\frac{1}{\mu}} \cdot \|u\|_{\mu}$$

Daraus folgt: $\varphi_f \in \left(L^{\mu}\right)^*$.

Die Norm von φ_f ist gleich $\|f(\xi)\|_{\frac{1}{\mu}}$. Das folgt mittels a):

$$\|\varphi_f\|_{(L^{\mu})^*} = \sup_{\substack{u \in L^{\mu} \\ u \neq 0}} \frac{|\varphi_f(u)|}{\|u\|_{\mu}} = \sup_{\substack{u \in L^{\mu} \\ u \neq 0}} \frac{\left|\left(\frac{f(\xi)}{\mu(\xi)},\, \mu(\xi) u(\xi)\right)_{L_2}\right|}{\|\mu(\xi) u(\xi)\|_{L_2}} =$$

$$= \sup_{\substack{v \in L_2 \\ v \neq 0}} \frac{\left|\left(\frac{f}{\mu}, v\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{L_2}} = \left\| \frac{f(\xi)}{\mu(\xi)} \right\|_{L_2} = \|\varphi_f\|_{\frac{1}{\mu}}$$

$\Rightarrow$ $L^{\frac{1}{\mu}}$ ist isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $\left(L^{\mu}\right)^*$.

Wir zeigen weiter, daß dies kein echter Unterraum ist, nämlich daß sich jedes $\varphi \in \left(L^{\mu}\right)^*$ durch ein $f_{\varphi}(\xi) \in L^{\frac{1}{\mu}}$ in der Form

$$\varphi(u) = \int \overline{f_{\varphi}(\xi)}\, u(\xi)\, d\xi$$

darstellen läßt:

Sei $\varphi \in \left(L^{\mu}\right)^* \Rightarrow |\varphi(u)| \leq \text{const.} \|u\|_{\mu} = \text{const.} \|\mu u\|_{L_2}$.

Wegen der Isomorphie von L^{μ} und L_2 folgt aus dieser Ungleichung, daß φ ein lineares stetiges Funktional φ_1 auf L_2 definiert.

$$\varphi(u) =: \varphi_1(\mu u)$$

Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein $f_{\varphi_1}(\xi) \in L_2$ so daß

$$\varphi(u) = \varphi_1(\mu u) = \int \overline{f_{\varphi_1}(\xi)}\, \mu(\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

und $\|\varphi_1\|_{L_2} = \|f_{\varphi_1}(\xi)\|_{L_2}$.

Definiert man eine Funktion $f_\varphi(\xi) := f_{\varphi_1}(\xi)\, \mu(\xi)$ so folgt aus der obigen Gleichung, daß $f_\varphi(\xi) \in L^{\frac{1}{\mu}}$ und

$$\varphi(u) = \int \overline{f_\varphi(\xi)}\, u(\xi)\, d\xi \quad .$$

Die Norm des Funktionals ist, wie oben gezeigt wurde, gleich

$$\|f_\varphi\|_{L^{\frac{1}{\mu}}} = \|f_\varphi(\xi)\|_{\frac{1}{\mu}} \quad .$$

Damit ist Satz (3.2) bewiesen.

(3.3) Folgerung: $(f,g)_\mu := \int \overline{f(\xi)}\, g(\xi)\, \mu^2(\xi)\, d\xi$ definiert ein inneres Produkt in L^μ . Mit diesem Produkt ist L^μ ein Hilbert-Raum.

Beweis: Das folgt aus dem ersten Teil des Satzes (3.2).

Bevor wir den nächsten Satz hinschreiben, werden wir die Definition des oft vorkommenden Raumes S bringen.
S besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die zusammen mit ihren Ableitungen beliebiger Ordnung für $|\xi| \to \infty$ rasch gegen Null streben, d.h. für beliebige r und q ist die Beziehung

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |(1+|\xi|^2)^r\, \varphi^{(q)}(\xi)| = 0$$

erfüllt. Die Topologie von S ist aus dem folgenden System von Nullumgebungen definiert:

$$U(r,k,\varepsilon) := \{\varphi \in S : \max |(1+|\xi|^2)^r \varphi^{(q)}(\xi)| < \varepsilon \ , |q| = 1,2,\ldots,k\}$$

wobei r und k natürliche Zahlen sind, und ε eine positive Zahl ist. Mit S' wird der Dualraum von S bezeichnet.

(3.4) Satz: S liegt dicht in jedem L^{μ} .

Beweis: Der Beweis ist in zwei Schritten erledigt. Im ersten zeigt man, daß jede Funktion $u(\xi) \in L^{\mu}$ durch eine Funktion mit kompaktem Träger in L^{μ} approximierbar ist und im zweiten, daß sich jede solche Funktion von einer Funktion aus C_0^{∞} approximieren läßt. Wir wählen zuerst eine Funktion $\zeta_t(\xi) \in C_0^{\infty}$ die folgende Eigenschaften hat: $0 \le \zeta_t(\xi) \le 1$, $\zeta_t(\xi) = 1$ für $|\xi| \le t$ und $\zeta_t(\xi) = 0$ für $|\xi| > 2t$. Eine solche Funktion existiert.

Daraus folgt, daß $\zeta_t(\xi) u(\xi)$ für jedes $u(\xi) \in L^{\mu}$ einen kompakten Träger hat.

Außerdem gilt: $|\zeta_{t_1}(\xi) u(\xi)| \le |\zeta_{t_2}(\xi) u(\xi)| \le |u(\xi)|$ für $t_1 \le t_2$

wobei $|u(\xi)|^2 \mu^2(\xi)$

integrierbar ist.

Aus dem Konvergenz-Satz von Lebesgue folgt, daß $|u(\xi)\zeta_t(\xi)|^2 \mu^2(\xi)$ integrierbar ist und

$$\int |u(\xi)\zeta_t(\xi) - u(\xi)|^2 \mu^2(\xi)\, d\xi \longrightarrow 0$$

d.h. $u(\xi)\zeta_t(\xi) \longrightarrow u(\xi)$ in L^M.

Sei jetzt $w(\xi) \in C^\infty_0$ ein Regularisations-Kern, also

$$\operatorname{supp} w(\xi) \subseteq \{|\xi| < 1\} \quad \text{u.} \quad \int w(\xi)\,d\xi = 1$$

Für beliebige Distribution u definieren wir den Operator T_ε:

$$T_\varepsilon u := u * w_\varepsilon \quad \text{wobei} \quad w_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n} w\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) \Rightarrow$$

$$T_\varepsilon(\zeta_t(\xi)u(\xi)) \in C^\infty \quad \text{und} \quad \operatorname{supp} T_\varepsilon(\zeta_t u) \subseteq \{|\xi| < 2t+\varepsilon\}$$

Außerdem gilt:

$$\|\zeta_t u - T_\varepsilon \zeta_t u\|_M = \int_{|\xi| \le 2t+\varepsilon} |\zeta_t u - T_\varepsilon u|^2 M^2(\xi)\,d\xi \le$$

$$\le \max_{|\xi| < 2t+\varepsilon} M^2(\xi) \int_{|\xi| \le 2t+\varepsilon} |\zeta_t u - T_\varepsilon \zeta_t u|^2\,d\xi$$

Da aber $\zeta_t u \in L_2$ und ihre Regularisierung $T_\varepsilon \zeta_t u$ gegen $\zeta_t u$ strebt in L_2, folgt, daß das letzte Integral gegen Null strebt, wenn $\varepsilon \to 0$. Daraus folgt, daß $T_\varepsilon \zeta_t u \longrightarrow \zeta_t u$ in L^M w.z.b.w.

(3.5) Satz: $L^M \subset S'$ topologisch, d.h. jede Funktion $u(\xi) \in L^M$ definiert eine temperierte Distribution und die Topologie von L^M ist stärker als die von S' auf L^M induzierte Topologie.

Beweis: $u(\xi) \in L^{\mu}$. Wir ordnen folgende Distributionen zu:

$$(u,\varphi) := \int \overline{u(\xi)}\, \varphi(\xi)\, d\xi \quad \text{wobei} \quad \varphi(\xi) \in S \quad \Rightarrow$$

$$|(u,\varphi)| \leq \| \mu u \|_{L_2} \cdot \| (1+|\xi|^{\ell})\, \varphi(\xi) \|_{L_2}$$

Sei jetzt $\varphi_k(\xi) \to 0$ in S $\Rightarrow$ $(1+|\xi|^{\ell})\, \varphi_k(\xi) \to 0$

Aus dem Lebesgueschen Konvergenz-Satz folgt:

$$\int (1+|\xi|^{\ell})^2\, |\varphi_k(\xi)|^2 d\xi \to 0 \quad \text{für} \quad \varphi_k \to 0$$

Aus dieser Eigenschaft und aus der letzten Ungleichung folgt, daß $|(u,\varphi_k)| \to 0$ für $\varphi_k \to 0$ in S

$$\Rightarrow u \in S'$$

Wir haben noch zu zeigen, daß, wenn $u_k \to 0$ in S so gilt auch $u_k \to 0$ in S'.

Das folgt aber trivialerweise aus der obigen Ungleichung.

(3.6) Lemma: $\mu(\xi)$, $\nu(\xi)$ und $\omega(\xi)$ seien Gewichtsfunktionen. Wir nehmen an, daß für jedes $\xi \in \mathbb{R}_n$ folgende Ungleichung gilt:

$$\omega^2(\xi) \int \mu^{-2}(\xi-\eta)\, \nu^{-2}(\eta)\, d\eta < c^2 < \infty$$

Daraus folgt, daß die Faltung $u * v$ für jede Funktion $u \in L^{\mu}$ und $v \in L^{\nu}$ definiert und Element von L^{ω} ist. Außerdem gilt:

$$\| u * v \|_{\omega} \leq c\, \| u \|_{\mu} \cdot \| v \|_{\nu} \quad .$$

Beweis: $\|u*v\|_w^2 = \int w^2(\xi) \left| \int u(\xi-\eta) v(\eta)\, d\eta \right|^2 d\xi =$

$= \int w^2(\xi) \left| \int u(\xi-\eta) \frac{\mu(\xi-\eta)}{\mu(\xi-\eta)} v(\eta) \frac{\nu(\eta)}{\nu(\eta)} \cdot \frac{1}{\mu(\xi-\eta)} \cdot \frac{1}{\nu(\eta)}\, d\eta \right|^2 d\xi \leq$

$\leq \int w^2(\xi) \left[\int \frac{1}{\mu^2(\xi-\eta)} \cdot \frac{1}{\nu^2(\eta)}\, d\eta \right] \left[\int |u(\xi-\eta)\mu(\xi-\eta)|^2 \cdot |v(\eta)\nu(\eta)|^2 d\eta \right] d\xi$

$\leq c^2 \int \left[\int |u(\xi-\eta)\mu(\xi-\eta)|^2 \cdot |v(\eta)\nu(\eta)|^2 d\eta \right] d\xi =$

$= c^2 \|u\|_\mu^2 \cdot \|v\|_\nu^2 .$

IV. ÜBER DIE RÄUME H^κ.

(4.1) Definition: $H^\kappa := \{ u \in S' : \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u \in L^\kappa \}$

d.h. H^κ ist derjenige Raum, der aus allen Distributionen besteht, deren Fouriersche Transformation Elemente von L^κ sind. Die Topologie wird von folgendem skalaren Produkt definiert:

$$(u,v)_{H^\kappa} := \int \overline{\hat{u}(\xi)}\, \hat{v}(\xi)\, \mu^2(\xi)\, d\xi = (u,v)_\kappa$$

Aus dieser Definition folgt dann:

$$u(\varphi) = \int \overline{\hat{u}(\xi)}\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \qquad \forall\, \varphi \in S .$$

wobei $\hat{u}(\xi) \in L^\kappa$.

(4.2) Folgerung: Die Fourier-Transformation ist ein isometrischer Isomorphismus, zwischen H^κ und L^κ .

Beweis: Aus der Definition folgt: $\mathcal{F} H^\kappa \subset L^\kappa$

Andererseits ist bewiesen, daß $L^\kappa \subset S'$, d.h. für jede Funktion $\hat{u}(\xi) \in L^\kappa \;\; \exists_1 \; u \in S' : \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u$

$\Rightarrow$ Jede Funktion $\hat{u}(\xi) \in L^\kappa$ ist die F-Transformierte einer Distribution aus H^κ . Die Isometrie folgt aus der Definition.

(4.3) Satz: H^κ und $H^{\frac{1}{\kappa}}$ sind bezüglich der Bilinearform $\int \overline{\hat{u}(\xi)}\, \hat{v}(\xi)\, d\xi$ zueinander dual.

Beweis: Analog zum Beweis von Satz (3.2).

(4.4) Satz: a) $S \subset H^\mu$ topologisch und S dicht in H^μ

b) $H^\mu \subset S'$ topologisch.

Beweis: a) In Satz (3.4) ist bewiesen, daß S dicht in L^μ liegt. Andererseits gilt:

$$\mathcal{F}(H^\mu) = L^\mu \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(S) = S \ .$$

Daraus folgt: S liegt dicht in H^μ. Zu zeigen ist noch, daß jede Nullfolgte $\{u_k(x)\}$ in S, auch in H^μ Nullfolge ist: Aus der Definition der Topologie von S folgt daß für jedes ℓ, die Funktionen $(1+|\xi|^2)^\ell |\hat{u}_k(\xi)|^2$ gegen Null streben.

$$\Rightarrow \quad \int (1+|\xi|^2)^\ell |\hat{u}_k(\xi)|^2 d\xi \longrightarrow 0$$

Das folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz.
Da aber $\mu(\xi) \leq c(1+|\xi|^2)^{\ell/2}$ für ein bestimmtes ℓ gilt, folgt die Behauptung, d.h. $u_k \to 0$ in der Topologie von H^μ.

b) Im Satz (3.5) ist bewiesen, daß $L^\mu \subset S'$ topologisch. Aus dieser Tatsache und aus der oben erwähnten $\mathcal{F}(H^\mu) = L^\mu$ und $\mathcal{F}(S') = S'$, folgt die Behauptung.

(4.5) Lemma: Die regularisierten Distributionen $T_\varepsilon u$, wobei $u \in H^\mu$, sind Elemente von $H^\mu \cap C^\infty$ und es gilt $\| T_\varepsilon u - u \|_\mu \to 0$ für $\varepsilon \to 0$

Beweis: Bekanntlich ist $T_\varepsilon u = u * \omega_\varepsilon \in C^\infty$, wobei wie oben $\omega(x) \in C_0^\infty$, $\int \omega(x) dx = 1$ und $\omega_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ist.

Daß $T_\varepsilon u \in H^\mu$ ist, folgt aus der Beschränktheit der Funktion

$$\hat{\omega}(\varepsilon\xi) = \mathcal{F}(\omega_\varepsilon)$$

Es gilt nämlich:

$$\mathcal{F}(u * w_\varepsilon) = \hat{u}(\xi)\,\hat{\omega}(\varepsilon\xi) \qquad u.$$

$$\int |\hat{u}(\xi)\,\hat{\omega}(\varepsilon\xi)|^2 \mu^2(\xi)\,d\xi \leq \max_{\xi\in\mathbb{R}_n} |\hat{\omega}(\varepsilon\xi)|^2 \int |\hat{u}(\xi)|^2 \mu^2(\xi)\,d\xi < \infty$$

$$\Rightarrow \quad T_\varepsilon u \in H^\mu \cap C^\infty .$$

Wir zeigen noch, daß $\|u - T_\varepsilon u\|_\mu \to 0$ für $\varepsilon \to 0$:

$$\phi(\varepsilon) := \|u - T_\varepsilon u\|_\mu^2 = \int \mu^2(\xi)\,|\hat{u}(\xi)|^2\,|1 - \hat{\omega}(\varepsilon\xi)|^2\,d\xi$$

Der Grenzübergang $\phi(\varepsilon) \to \phi(0)$ für $\varepsilon \to 0$
ist möglich, wenn $\phi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ stetig ist.
Die Stetigkeit der Funktion $\phi(\varepsilon)$ erreicht man mit Hilfe
des folgenden Satzes aus der Analysis:

Satz: $\phi(\varepsilon) := \int h(\xi,\varepsilon)\,d\xi$
Die Funktion $h(\xi,\varepsilon)$ sei für fast alle $\xi\in\mathbb{R}_n$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ stetig und es gebe eine Umgebung $U(0)$ des Punktes 0 und eine auf der Menge $\mathbb{R}_n$ integrierbare Funktion $K(\xi) > 0$, so daß

$$|h(\xi,\varepsilon)| \leq K(\xi) \in L_1 \qquad \forall\ (\xi,\varepsilon) \in \mathbb{R}_n \times U(0) .$$

Dann ist $\phi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ stetig.

In unserem Fall ist $h(\xi,\varepsilon) = \mu^2(\xi)\,|\hat{u}(\xi)|^2\,|1 - \hat{\omega}(\varepsilon\xi)|^2$
eine stetige Funktion an der Stelle $\varepsilon = 0$, wegen der Stetigkeit von $\hat{\omega}(\xi)$.

Außerdem ist $\hat{\omega}(\varepsilon\xi)$ beschränkt unabhängig von ε . Daraus folgt:

$$\mu^2(\xi)|\hat{u}(\xi)|^2|1-\hat{\omega}(\varepsilon\xi)|^2 < \text{const.}\ \mu^2(\xi)|\hat{u}(\xi)|^2 \in L_1 \Rightarrow$$

$$\phi(\varepsilon) \to \phi(0) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0$$

Da aber $\hat{\omega}(0)=1$ ist, folgt $\phi(\varepsilon)\to 0$ für $\varepsilon \to 0$ w.z.b.w.

Wir werden jetzt eine Multiplikation in H^μ einführen. Diese soll nicht nur für Funktionen aus C^∞ definiert sein, sondern auch für viele Distributionen, die Elemente eines Raumes H^ν sind. Außerdem soll das so definierte Produkt von zwei regulären Distributionen gleich mit einer regulären Distribution sein, die als Erzeugende das gewöhnliche Produkt dieser Distributionen hat.

(4.6) Definition: Für $u \in H^\mu$ und $v \in H^\nu$ definieren wir folgende Multiplikation:

$$u\,v := \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u} * \hat{v}\right)$$

vorausgesetzt, daß die Faltung existiert.

Daß diese Multiplikation die obigen Forderungen erfüllt, wird an anderer Stelle bewiesen. Unten geben wir einen Satz, der die Distributionen, für die das Produkt mit H^μ definiert ist, charakterisiert.

(4.7) Satz: Gilt $w^2(\xi)\int \mu^{-2}(\xi-\eta)\nu^{-2}(\eta)\,d\eta < c^2 < \infty \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}_n$

dann ist das Produkt $H^\mu \cdot H^\nu$ definiert und ist gleich H^w. Außerdem ist die Abbildung:

$$H^\mu \times H^\nu \ni (u, v) \longmapsto uv \in H^w$$

stetig.

Beweis: Es folgt aus Satz (3.6) und der Isometrie von L^μ und H^μ .

V. EINBETTUNGSSÄTZE

Wir skizzieren erstens die Operation der Einbettung: Seien E und F topologische Vektorräume, und ϕ ist ein Raum, der in $E \cap F$ enthalten ist, und in beiden Räumen E und F dicht liegt. Außerdem gelte für jedes $\varphi \in \phi$ die Ungleichung:

$$\|\varphi\|_F \leq \text{const.} \|\varphi\|_E$$

wobei $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$ die Norm von E und F ist. Bezeichnen wir mit $I: E \to F$ den Operator, der jedem Element $\varphi \in E \cap \phi$ dasselbe Element φ zuordnet, in diesem Fall als Element des Raumes F, dann folgt aus der obigen Ungleichung, daß sich I auf dem ganzen Raum E fortsetzen läßt. Dann ist jedes Element $\varphi \in E$ einem $I\varphi \in F$ zugeordnet. Wenn man φ und $I\varphi$ identifiziert, dann sagt man, daß E in F eingebettet ist.

Wenn E und F Unterräume eines anderen topologischen Vektorraumes R ist, dann versteht man unter Einbettung von E in F die Mengen-Relation $E \subset F$.

In unserem Fall haben wir es mit Unterräumen von S' zu tun. Wir werden zeigen, daß beide Definitionen äquivalent sind, so daß wir sie bei den Beweisen anwenden können.

(5.1) Satz: Seien E und F zwei Banach-Räume, Unterräume eines topologischen Raums R und die Konvergenz bezüglich der Normen $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$ hat Konvergenz in der Topologie von R zur Folge. Ferner nehmen wir an, daß es eine Untermenge $\phi \subset E \cap F$ gibt, die dicht in E und F ist. Dann ist die Beziehung $E \subset F$ äquivalent mit der Ungleichung $\|\varphi\|_F \leq \text{const.} \|\varphi\|_E \quad \forall \varphi \in \phi$.

Beweis: Wir nehmen an, daß die letzte Ungleichung gilt. Wir werden zeigen, daß jedes Element $u \in E$ auch Element von F ist: Da ϕ dicht in E ist, gibt es eine Folge $u_n \in \phi$, die in der Topologie von E gegen u konvergiert, d.h. $\|u - u_n\|_E \to 0$. Diese Folge ist eine Fundamentalfolge in E Aus der Ungleichung folgt aber, daß sie auch Fundamentalfolge bezüglich $\|\cdot\|_F$ ist, und da F ein vollständiger Raum ist, konvergiert in F gegen ein Element $u' \in F$. Dieses Element ist aber gleich u, weil nach Voraussetzung Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_E$ oder $\|\cdot\|_F$ Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_R$ zur Folge hat. Daraus würde folgen:

$$\|u - u'\|_R \leq \|u - u_n\|_R + \|u_n - u'\|_R \to 0$$

d.h. $u = u'$

Umgekehrt sei $E \subset F$, und I der Identitätsoperator: $E \ni \varphi \mapsto \varphi \in F$. Wir werden zeigen, daß der Operator I abgeschlossen ist, d.h. die Menge $\{(\varphi, I\varphi) : \varphi \in E\}$ ist abgeschlossen in $E \times F$ bezüglich der Produkt-Topologie $\|(e, f)\|_{E \times F} = \|e\|_E + \|f\|_F$. Das ist äquivalent mit folgendem: aus $\|\varphi_n\|_E \to 0$ folgt $\|I\varphi_n\|_F \to 0$. Das kann man aber wie im ersten Teil des Beweises zeigen.

Es ist also bewiesen, daß I ein abgeschlossener Operator ist mit dem Definitionsbereich E. Mit Hilfe des Satzes des "abgeschlossenen Graphen" folgt die Stetigkeit von I, was äquivalent mit der Norm-Ungleichung ist.

[Graphen-Theorem: E und F Banach-Räume.
$I: E \to F$ abgeschlossener Operator mit Definitionsbereich gleich E. Daraus folgt, daß I stetig ist.] w.z.b.w.

Wir bringen nun einige Sätze über Einbettungen, die wir später brauchen werden.

(5.2) Satz: H^ν ist in H^μ einbettbar dann und nur dann, wenn die Ungleichung

$$\mu(\xi)/\nu(\xi) \leq \text{const.}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}_n$ gilt.

Beweis: Notwendigkeit: Wir nehmen an, daß H^ν in H^μ einbettbar ist. Wir wissen noch, daß C_0^∞ dicht in H^ν und H^μ ist.
Daraus folgt, daß

$$\|u\|_\mu \leq \text{const.} \|u\|_\nu \quad \forall\, u \in C_0^\infty$$

gilt. Ausführlicher geschrieben lautet diese Ungleichung:

$$\int |\hat{u}(\xi)|^2 \mu^2(\xi)\, d\xi \leq \text{const.} \int |\hat{u}(\xi)|^2 \nu^2(\xi)\, d\xi \quad \forall\, u \in C_0^\infty$$

Ersetzt man $\hat{u}(\xi)\nu(\xi)$ durch $h(\xi)$ so bekommt man:

$$\int \frac{\mu^2(\xi)}{\nu^2(\xi)} |h(\xi)|^2 d\xi \leq \text{const.} \int |h(\xi)|^2 d\xi$$

Die Menge $\{ \hat{u}(\xi)\nu(\xi) : u \in C_0^\infty \}$ ist ein dichter linearer Unter-Raum in L_2. Daraus folgt, daß

$$\int \frac{\mu^2(\xi)}{\nu^2(\xi)} |h(\xi)|^2 d\xi \leq \text{const.} \int |h(\xi)|^2 d\xi \quad \forall\, h(\xi) \in L_2$$

Das ist aber nur möglich, wenn $\mu(\xi)/\nu(\xi) \leq$ const. Diese Folgerung ist in diesem Fall trivial wegen der Monotonie der Gewichtsfunktionen, die wir brauchen werden. Gilt aber auch im allgemeinen.

Hinreichend: Das ist trivial.

(5.3) Satz: H^μ ist in C einbettbar (C = Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit der Norm

dann und nur dann, wenn

$$\int \frac{1}{\mu^2(\xi)}\, d\xi < \infty$$

Die genaue Formulierung des Satzes lautet:

Die Elemente von H^μ sind reguläre Distributionen, deren Erzeugende bis auf Nullmengen stetige Funktionen sind, dann und nur dann wenn die Ungleichung $\int \frac{1}{\mu^2(\xi)}\, d\xi < \infty$ gilt.

Beweis: Notwendigkeit: Wir nehmen an, daß H^μ in C einbettbar ist. Aus dem Satz (5.1) und aus der Tatsache, daß C_0^∞ in C und H^μ dicht ist, folgt, daß:

$$\max_x |u(x)| \leq \text{const.} \|u\|_\mu \qquad \forall\, u \in C_0^\infty$$

Insbesondere

$$|u(0)| = |(\delta, u)| \leq \text{const.} \|u\|_\mu$$

d.h. die $\delta(x)$-Funktion ist ein Element von $H^{\frac{1}{r}}$. Das bedeutet, daß $\mathcal{F}(\delta) = 1 \in L^{\frac{1}{r}} \Rightarrow \omega^{-1}(\xi) \in L_2$

Hinreichend: Man muß zeigen, daß wenn $\omega^{-1}(\xi) \in L_2$ ist, dann gilt:

$$\max_x |u(x)| \leq \text{const.} \|u\|_r \qquad \forall u \in C_0^\infty$$

Aus der Fourierschen Formel und der Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$|u(x)| = \left| \int \hat{u}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \right| = \left| \int \hat{u}(\xi)\omega(\xi) \frac{1}{\omega(\xi)} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \|u\|_r \cdot \left(\int \frac{1}{\omega^2(\xi)} d\xi \right)$$

w.z.b.w.

Wir untersuchen weiter, wann H^r in L_p einbettbar ist. Den Raum L_p identifizieren wir mit einer Untermenge der Distributionen S', für die folgendes gilt:

$$|(u,\varphi)| = \left| \int \overline{u(x)}\, \varphi(x)\, dx \right| \leq \text{const.} \|\varphi\|_{p'}, \quad \forall \varphi \in S$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und Const. > 0 ist.

Wir geben zuerst eine Definition:

(5.4) Definition: Mit M_r^2 bezeichnen wir den Raum der lokal-integrierbaren Funktionen $\beta(\xi)$, für die

$$\left(\int |\beta(\xi)\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq c \|\varphi\|_r \quad , \varphi \in S$$

gilt, wobei $1 \leq r \leq 2$ und $c > 0$ eine Konstante ist.

$M^2_r(\beta)$ ist die kleinste Konstante c, für die die obige Ungleichung richtig ist.

(5.5) Satz: H^μ ist in L_p $(p \geq 2)$ einbettbar, dann und nur dann, wenn $\mu^{-1}(\xi) \in M^2_{p'}$.

Beweis: Notwendigkeit: Wir nehmen an, daß $\mu^{-1}(\xi) \in M^2_{p'}$ ist. Daraus und aus der Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$|u(\varphi)| = \left| \int \overline{\hat{u}(\xi)}\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \right| \leq \left(\int \frac{1}{\mu^2(\xi)} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot \|u\|_\mu$$

für beliebige $u \in H^\mu$ und $\varphi \in S$. $\Rightarrow$

$$\|u\|_p = \sup \frac{|u(\varphi)|}{\|\varphi\|_{p'}} \leq M^2_{p'}(\mu^{-1}) \|u\|_\mu \Rightarrow H^\mu \subset L_p .$$

Hinreichend: Wir nehmen an, daß die Ungleichung

$$\|u\|_p \leq c \|u\|_\mu \quad , u \in C^\infty_0$$

gilt, d.h. H^μ ist in L_p einbettbar.
Jede Funktion $\varphi \in C^\infty_0$ definiert auf H^μ ein lineares stetiges Funktional

$$(l_\varphi, u) := u(\varphi) \Rightarrow \|l_\varphi\| = \|\varphi\|_{\frac{1}{\mu}}$$

Es gilt aber nach Voraussetzung $\|u\|_p \leq c \|u\|_\mu \ \forall u \in C^\infty_0 \Rightarrow$

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{\mu}} = \sup \frac{|u(\varphi)|}{\|u\|_\mu} \leq c' \sup \frac{|u(\varphi)|}{\|u\|_p} \leq c \|\varphi\|_{p'} \quad \forall \varphi \in C^\infty_0$$

$$\Rightarrow \left(\int \frac{1}{\mu^2(\xi)} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq c \|\varphi\|_{p'} \Rightarrow \mu^{-1} \in M^2_{p'} .$$

(5.6) Folgerung: H^μ in C^m einbettbar $\Leftrightarrow \frac{(1+|\xi|)^m}{\mu(\xi)} \in$

(5.7) Bemerkung: $M^2_\infty = L_\infty$

VI. ÜBER DAS PRODUKT VON DISTRIBUTIONEN

Die Anwendung des Schrödinger Operators auf den Distributionsraum $H^{\vee}$ erfordert die Definition des Produktes des Potentials $q(x)$ mit den Distributionen $u \in H^{\vee}$. Da $q(x)$ im allgemeinen eine singuläre Funktion ist, genügt die Multiplikation, die bei L. Schwartz [14] und Gelfand-Schilov [8] behandelt ist, nicht, um den Operator $-\Delta + q(x)$ auf $H^{\vee}$ zu definieren. In der Arbeit von Volevich-Paneyakh [16] ist das Produkt $u \upsilon = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u} * \hat{\upsilon})$ definiert, wobei $u \in H^{\mu}$, $\upsilon \in H^{\vee}$ und $\hat{u} * \hat{\upsilon}$ im gewöhnlichen Sinne existiert. Die obigen Autoren behandeln nicht die Frage, ob dieses Produkt mit dem gewöhnlichen verträglich ist, falls u und υ reguläre Distributionen sind. Die Verträglichkeit der beiden Produkte ist jedoch notwendig, wenn man die gewöhnlichen mit den verallgemeinerten Eigenlösungen des Operators vergleichen will.

Wir werden unten diese Verträglichkeit, für die Distributionen, die wir brauchen, beweisen. Das erreichen wir, indem wir erstens zeigen, daß das Produkt von Volevich-Paneyakh identisch ist mit dem von Hirata-Ogata definierten [10], und zweitens, daß das letzte Produkt diese Forderung erfüllt.

(6.1) Definition: $A, B \in \mathcal{D}'$ und ρ_k, ρ'_ℓ δ-Folgen, d.h. Funktionen aus C^{∞} die gegen δ konvergieren. Existieren die Grenzwerte $(A * \rho_k)B$ und $A(\rho'_k * B)$ in $\mathcal{D}'$ und stimmen überein, so nennt man diesen Grenzwert das Produkt von A und B und bezeichnet es mit $A \circ B$.

Hirata-Ogata [10] beweisen folgendes:

Sei A , $B \in \mathcal{D}'$ und $(A*\varphi)(\check{B}*\psi)$ integrierbar für alle φ , $\psi \in \mathcal{D}$, dann gibt es nur eine Distribution $A \bar{*} B$, die sie Faltung nennen, und die folgende Gleichung erfüllt:

$$\left((A \bar{*} B) * \varphi , \psi \right) = \int (A*\varphi)(x)(\check{B}*\psi)(x)\,dx \qquad \forall\ \varphi, \psi \in \mathcal{D} .$$

Sind A , B temperierte Distributionen und wird oben statt des Raumes $\mathcal{D}$ der Raum S genommen, dann heißt die Faltung S'-Faltung und wird mit $A \circledast B$ bezeichnet.

Ferner beweisen sie [10] das folgende Theorem:

Theorem: Ist $A \circledast B$ definiert, so gilt:

$$\mathcal{F}(A \circledast B) = \mathcal{F}(A) \cdot \mathcal{F}(B)$$

Die Faltung $A * B$ ist die von L. Schwartz [14] .
Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

(6.2) Satz: Die S'-Faltung der Räume L^{μ} und L^{ν} ist gleich mit $L^{\mu} * L^{\nu}$, falls letztere definiert ist, und

$$\mu(\xi) = \mu(-\xi) \quad , \quad \nu(\xi) = \nu(-\xi) .$$

gilt.

Beweis: Sei $f(x) \in L^{\mu}$, $g(x) \in L^{\nu}$, und $(f*g)(x)$ definiert, d.h. für fast alle x im gewönnlichen Sinne definiert ist. Wir werden erstens zeigen, daß $(f*\varphi)(x) \in L^{\mu}$ für alle $\varphi(x) \in S$ ist. Das ist richtig, wenn $|(f*\varphi, \psi)|$ beschränkt für alle

$\psi(x) \in S \cap B$, wobei B eine beschränkte Menge bezüglich der Topologie des Raumes $L^{\frac{1}{\mu}}$ ist. Sei speziell

$B := \{ \psi \in S : \|\psi\|_{\frac{1}{\mu}} \leq 1 \}$ und $\varphi \in S$. Dann ist $\check{\varphi} * B$ eine beschränkte Menge in $L^{\frac{1}{\mu}}$. Da aber $f(x)$ ein stetiges Funktional auf $L^{\frac{1}{\mu}}$ ist, ist $|(f, \check{\varphi} * B)| = |(f * \varphi, B)|$ beschränkt.

Daraus folgt $(f * \varphi)(x) \in L^{\mu}$.

Aus der Voraussetzung $\mu(x) = \mu(-x)$ folgt

$$(\check{f} * \varphi)(x) := (f * \varphi)(-x) \in L^{\mu}$$

Analog kann man zeigen, daß

$$(\check{g} * \psi)(x) \in L^{\nu} \qquad \forall\, \psi \in S$$

ist.

Das letzte Ergebnis und die Voraussetzung haben zur Folge die Existenz der Faltung:

$$((\check{f} * \varphi) * (\check{g} * \psi))(x) \qquad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in S$$

$$\Rightarrow \quad (f * \varphi)(x) \cdot (\check{g} * \psi)(x) \in L_1$$

Wir haben bis jetzt gezeigt, daß wenn $L^{\mu} * L^{\nu}$ im gewöhnlichen Sinne existiert, dann existiert auch die S'-Faltung $f \circledast g$. Zu zeigen ist noch, daß $f * g = f \circledast g$ ist. Das erledigt man, indem man die Definition von $f \circledast g$ und ihre Eindeutigkeit berücksichtigt:

$$\left((f*g)*\varphi,\psi\right) = \int (f*\varphi)(x)\,(\check{g}*\psi)(x)\,dx =$$

$$= \int \left[\int f(x-y)\varphi(y)dy\right]\left[\int \check{g}(x-z)\,\psi(z)dz\right]dx =$$

$$= \int \psi(z)\left[\int \varphi(y)\left[\int f(x-y)\,g(z-x)\,dx\right]dy\right]dz =$$

$$= \int \psi(z)\left[\int \varphi(y)\,[f*g](z-y)\,dy\right]dz =$$

$$= \int \psi(z)\left[(f*g)*\varphi\right](z)\,dz = \left((f*g)*\varphi\,,\,\psi\right)$$

Bemerkung: Im folgenden soll stets $\mu(-\xi) = \mu(\xi)$ und $\nu(-\xi) = \nu(\xi)$ sein.

(6.3) Folgerung: $u \in H^{\mu}$, $v \in H^{\nu}$ und $L^{\mu} * L^{\nu}$ sei definiert. Dann gilt $u\,v = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u} * \hat{v}) = u \circ v$.

Beweis: Das folgt aus dem Satz (6.2) und aus dem oben genannten Theorem von Hirata-Ogata [10].

Im Falle wo u und v reguläre Distributionen sind, stimmt dieses Produkt, wie wir gleich sehen werden, mit dem gewöhnlichen überein. Ist aber mindestens eine der Distributionen u oder v die Regularisierung einer Funktion mit algebraischen Singularitäten, dann stimmt das im allgemeinen nicht mehr überein.

(6.4) Satz: Sei $u \in H^{\mu}$, $v \in H^{\nu}$ reguläre Distributionen und sei das Produkt uv definiert. Dann gilt:

$$uv = u(x)v(x)$$

Beweis: Nach Definition ist $uv = \lim u v_n$ wobei v_n Regularisierung von v ist und der Limes im Distributionssinne zu verstehen ist, d.h. v_n strebt gleichmäßig gegen v auf jeder kompakten Menge. Daraus folgt, daß auch uv_n gleichmäßig gegen $u(x)v(x)$ auf jeder kompakten Menge strebt. Da aber $u(x)v(x)$ lokal-integrierbar ist, folgt die Behauptung.

(6.5) Folgerung: $u \in H^{\mu}$, $v \in H^{\nu}$ Distributionen, die auf bestimmten Bereichen mit gewöhnlichen Funktionen übereinstimmen. Dann ist $uv = u(x)v(x)$ in diesen Bereichen.

Beweis: Man kann die Distributionen lokal betrachten und den vorigen Satz wiederholen.

Wir werden es später mit Fällen zu tun haben, wo man das Produkt einer regulären Distribution f(x) mit den Distributionen eines Raumes H^{μ} bilden muß, ohne vorher f(x) als Element eines Raumes H^{ν} identifiziert zu haben. Der für uns interessante Fall lautet:

(6.6) Satz: Sei $f(x)$ eine reguläre Distribution, $u(x) \in H^{\mu}$ wobei $\mu(\xi) \geq \text{const} > 0$, $\mu(\xi) = \mu(-\xi)$. Sei noch $\hat{f}(\xi) \in L_{1,loc}$ und $(\hat{f} * \hat{u})(\xi)$ sei definiert und quadratintegrierbar als Funktion von ξ, für alle $u \in H^{\mu}$.

Dann ist das Produkt $f(x) \circ u(x)$ definiert und gleich mit dem gewöhnlichen.

Beweis: Zu zeigen ist erstens, daß $(\hat{f} * \varphi)(\xi) \cdot (\hat{u}^{\vee} * \psi)(\xi) \in L_1$ $\forall\, \varphi, \psi \in S$ wobei $\hat{u}^{\vee}(\xi) = \hat{u}(-\xi)$ ist.
Das ist aber trivial, weil mit $\hat{u} \in L^{\infty}$ ist auch $\hat{u}(-\xi)$ und $(\hat{u}^{\vee} * \psi)(\xi) \in L^{\infty}$ für alle $\psi \in S$. Außerdem $L^{\infty} \subset L_2$ und $(\hat{f} * \hat{u})(\xi) \in L_2$ für alle $\hat{u}(\xi) \in L^{\infty}$. Das Produkt aber von zwei quadratintegrierbaren Funktionen ist integrierbar.
$\Rightarrow$ $\hat{f} \circledast \hat{u}$ ist definiert. Nach dem Satz von Hirata-Ogata gilt dann: $\mathcal{F}(\hat{f} \circledast \hat{u}) = \hat{\hat{f}} \circ \hat{\hat{u}} = f(-x) \circ u(-x) = (f \circ u)(-x)$.
Wendet man auf diese Gleichung die Operation $\mathcal{F}^{-1}\,\mathcal{F}^{-1}$ an, so bekommt man:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} * \hat{u}) = f(x) \circ u(x)$$

Zu zeigen ist noch, daß $f(x) \circ u(x)$ gleich mit dem gewöhnlichen Produkt $f(x) \cdot u(x)$ ist. Der Beweis läuft ganz analog wie im Satz (6.4).

VII. ÜBER DIE RÄUME $H^{(\sigma,\pi)}$

Man kann zeigen, daß die Einbettung $H^{\sigma} \to L_2$ nie ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Das hängt damit zusammen, daß die Elemente von H^{σ} im Unendlichen nicht stark gegen Null streben. Deshalb kann man nicht den Raum H^{σ} als positiven Raum eines Tripels annehmen.

Das veranlasst uns, neue Räume zu definieren. Zu diesen Räumen hat uns eine Bemerkung von Berezanskii ([3] Seite 59) geführt.

(7.1) Definition: $H^{(\sigma,\pi)} := \{ u \in S' : \pi(x)u \in H^{\sigma} \}$

$\pi(x)$ ist eine positive stetige Funktion. Dabei ist vorausgesetzt, daß $\pi(x)u$ definiert ist. Das Produkt $\pi(x)u$ ist wie in der Arbeit von Hirata-Ogata definiert.

(7.2) Satz: Die bilineare Form $(u, v)_{(\sigma,\pi)} := (\pi u, \pi v)_{\sigma}$ definiert in $H^{(\sigma,\pi)}$ ein skalares Produkt.

Beweis: trivial.

(7.3) Satz: Sei u eine Distribution und $\pi(x)u$ eine reguläre Distribution. Dann ist u regulär.

Beweis: $\pi(x)u = \lim \pi(x)(u * \varphi_n)(x)$, wobei φ_n eine δ-Folge ist. Die Funktionen-Folge $\pi(x)(u*\varphi_n)(x)$ besteht aus stetigen Funktionen, die auf jeder kompakten Menge gegen eine lokal-integrierbare Funktion $u_{\pi}(x)$ gleichmässig konvergiert.

$\Rightarrow (u*\varphi_n)(x)$ strebt gleichmässig auf jede kompakte Menge gegen die lokal-integrierbare Funktion $\frac{u_\pi(x)}{\pi(x)}$, d.h. u ist regulär und wird von $\frac{u_\pi(x)}{\pi(x)}$ erzeugt.

Vereinbarung: In der ganzen Arbeit wird die Funktion $\pi(x) \geq$ const. angenommen. Ausserdem soll $\pi(x)$ ein Multiplikator in S sein, d.h. $\pi(x) \in C^\infty$ und

$$|D^q \pi(x)| \leq C_q (1+|x|)^{k_q} \quad , \quad (|q| = 0, 1, 2, \cdots)$$

wobei C_q, k_q Konstanten.

(7.4) Satz: Sei $\pi(x)$ wie oben, und $\mu(\xi) \geq$ const. > 0 Dann ist die Abbildung

$$\chi: H^{(\mu,\pi)} \ni u \longmapsto \pi(x)u \in H^\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: χ ist injektiv: Aus der Voraussetzung $\mu(\xi) \geq$ const. > 0 folgt, daß $H^\mu \subseteq L_2$. Aus dem Satz (7.3) folgt: $\pi(x)u = \pi(x)u(x)$

Sei $\|\pi(x)u(x)\|_{L_2} = 0 \Rightarrow \int |(\widehat{\pi u})(\xi)|^2 d\xi = 0 \Rightarrow$

$$0 = \int |\pi(x)u(x)|^2 dx \geq \text{Const.} \int |u(x)|^2 dx \Rightarrow u(x) = 0 \text{ f.ü.}$$

χ ist surjektiv: Zu zeigen ist, daß für jedes $v(x) \in H^\mu$ gibt es ein $u_v(x) \in H^{(\mu,\pi)}$, so daß $v(x) = \pi(x) u_v(x)$ Die Funktion $v(x)/\pi(x)$ ist quadratintegrierbar. Man kann leicht zeigen, daß $\pi(x) \circ \frac{v(x)}{\pi(x)}$ (Distributionsprodukt) definiert ist, und gleich mit dem gewöhnlichen Produkt, d.h.

$$\pi(x) \circ \frac{v(x)}{\pi(x)} = v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{v(x)}{\pi(x)} \in H^{(\mu,\pi)}$$

So ist auch die Surjektion von χ bewiesen. Die Isometrie folgt von der Definition des Raumes $H^{(\mu,\pi)}$.

(7.5) Folgerung: $H^{(\mu,\pi)}$ ist ein Hilbert-Raum.

Beweis: H^{μ} ist ein Hilbert-Raum. Daraus folgt die Behauptung.

Nach diesen Vorbereitungen möchten wir den Dualen Raum $(H^{(\mu,\pi)})^*$ finden. Als Hilfsmittel wird dabei der Satz (7.4) und die Tatsache, daß der Duale von H^{μ} der Raum $H^{\frac{1}{\mu}}$ ist, angewandt.

(7.6) Satz: Sei $\mu(\xi) \geq (\text{const.} > 0$. Dann gilt: $H^{(\mu,\pi)}$ und $H^{(\frac{1}{\mu},\pi)}$ sind bezüglich der Bilinearform $\int \overline{\hat{u}(\xi)}\, \hat{v}(\xi) d\xi$ zueinander dual.

Beweis: Für jedes $f \in (H^{(\mu,\pi)})^*$ gilt die Ungleichung:

$$|(f,u)| \leq \text{const.} \|u\|_{(\mu,\pi)} = \text{const.} \|\pi(x)u(x)\|_{\mu} \quad \forall\, u \in H^{(\mu,\pi)}$$

Da aber $\pi(x)u(x)$ alle Elemente von H^{μ} durchläuft, wenn u den Raum $H^{(\mu,\pi)}$ durchläuft, folgt, daß man zu jedem $f \in (H^{(\mu,\pi)})^*$ ein Element $f_\pi \in H^{\frac{1}{\mu}}$ zuordnen kann, das aus der Gleichung $(f,u) = (f_\pi, \pi(x)u)$ definiert ist. Die rechte Seite dieser Gleichung ist bekannt.

$$\Rightarrow (f_\pi, \pi(x)u) = \int \overline{\hat{f}_\pi(\xi)}\, (\widehat{\pi u})(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int \overline{(\hat{f}_\pi)_k(\xi)}\, (\widehat{\pi u})(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int \overline{(f_\pi)_k(x)}\, \pi(x)\, u(x)\, dx$$

wobei $(\hat{f_\pi})_K(\xi)$ gleich $\hat{f}_\pi(\xi)$ für $|\xi| < K$ und Null sonst ist

$$(f_\pi)_K(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[(\hat{f_\pi})_K(\cdot)\right](x)$$

Der Limes ist im Distributionssinne zu verstehen. Daraus folgt

$$(f_\pi)_K(x)\,\pi(x) \in \left(H^{(\pi,\pi)}\right)^*$$

Ausserdem existiert der Limes von $(f_\pi)_K(x)\,\pi(x)$ in der schwachen Topologie von $\left(H^{(\pi,\pi)}\right)^*$ und ist in $\left(H^{(\pi,\pi)}\right)^*$ enthalten. Wir haben also gezeigt, daß es zu jedem $f \in \left(H^{(\pi,\pi)}\right)^*$ ein $f_\pi \in H^{\frac{1}{\pi}}$ gibt, so dass

$$f = \lim_{K\to\infty} (f_\pi)_K(x)\,\pi(x) = \pi(x)\,f_\pi$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Vereinbarung über die Funktion $\pi(x)$:

$$\left((f_\pi)_K\,\pi(x)\,,\varphi\right) = \left((f_\pi)_K\,,\,\pi(x)\varphi\right) \longrightarrow \left(f_\pi\,,\,\pi(x)\varphi\right) =$$

$$= \left(\pi(x)\,f_\pi\,,\varphi\right) \qquad \forall\ \varphi \in S\ .$$

Man kann die Gleichung auch mit $\pi^{-1}(x)$ multiplizieren, da in unserem Fall $\pi^{-1}(x)$ auch ein Multiplikator in S ist. Man bekommt:

$$\left(\frac{1}{\pi(x)}\,f\,,\varphi\right) = \left(f\,,\,\frac{1}{\pi(x)}\,\varphi\right) = \left(\pi(x)\,f_\pi\,,\,\frac{1}{\pi(x)}\,\varphi\right) =$$

$$= (f_\pi\,,\varphi) \qquad \forall\ \varphi \in S\ .$$

d.h. $\dfrac{f}{\pi(x)} \in H^{\frac{1}{\pi}}$

Für die Norm von f bekommt man:

$$\|f\|_{(H^{(r,\pi)})^*} = \sup_{u \in H^{(r,\pi)}} \frac{|(f,u)|}{\|u\|_{(r,\pi)}} = \sup_{u \in H^{(r,\pi)}} \frac{|(f_\pi, \pi(x)u)|}{\|\pi(x)u\|_r} =$$

$$= \sup_{w \in H^r} \frac{|(f_\pi, w)|}{\|w\|_r} = \|f_\pi\|_{\frac{1}{r}} = \left\| \frac{f}{\pi(x)} \right\|_{\frac{1}{r}} = \|f\|_{(\frac{1}{r}, \frac{1}{\pi})} .$$

Die Form des Funktionals ist nach Konstruktion:

$$(f,u) = \int \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi \qquad \forall\, u \in H^{(r,\pi)}$$

Wir zeigen noch, daß für jede Distribution $f \in H^{(\frac{1}{r}, \frac{1}{\pi})}$ gilt:

$$\left| \int \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi \right| \leq \text{const.} \|u\|_{(r,\pi)} \qquad \forall\, u \in H^{(r,\pi)} .$$

Nimmt man statt f die Regularisierung $f_K(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}_K(\xi)\right](x)$ wobei

$$(\hat{f}_K)(\xi) := \begin{cases} \hat{f}(\xi) & \text{für } |\xi| < K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und berücksichtigt daß $f_K(x)/\pi(x) \in H^{\frac{1}{r}}$ und $u(x)\,\pi(x) \in H^r$ so folgt:

$$\left| \int \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi \right| = \left| \lim_{K \to \infty} \int \overline{(\hat{f}_K)(\xi)}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \lim_{k\to\infty} \int \overline{f_k(x)}\, u(x)\, dx \right| = \left| \lim \int \overline{\frac{f_k(x)}{\pi(x)}}\, \pi(x)\, u(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \lim \int \widehat{\left(\frac{f_k}{\pi(x)}\right)}(\xi)\, \widehat{(\pi(\cdot)u(\cdot))}(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \int \widehat{\left(\frac{f}{\pi(\cdot)}\right)}(\xi)\, \widehat{(\pi(\cdot)u(\cdot))}(\xi)\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq \text{const.} \|\pi(x)u(x)\|_{L_2} = \text{const.} \|u\|_{(H,\pi)} .$$

Damit ist alles bewiesen.

(7.7) Satz: Sei $\mu^{-1}(\xi) \leq$ const. und $\pi(x)$ wie in der Vereinbarung. Dann ist der Operator

$$T: H^{(H,\pi)} \ni u(x) \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left[\mu(\xi)(\hat{u} * \hat{\pi})(\xi)\right](x) \in L_2$$

ein isometrischer Isomorphismus mit:

$$(T^{-1}h)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\widehat{\left(\frac{1}{\pi(\cdot)}\right)} * \frac{\hat{h}(\cdot)}{\mu(\cdot)}\right)(\xi)\right](x)$$

wobei $h \in L_2$.

Die Operatoren T und T^{-1} kann man auch wie folgt schreiben:

$$(Tu)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mu(\xi)\,\widehat{(\pi(\cdot)u(\cdot))}(\xi)\right](x)$$

$$(T^{-1}h)(x) = \frac{1}{\pi(x)} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\hat{h}(\cdot)}{\mu(\cdot)}\right](x) .$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass die letzten Formen für T und T^{-1} richtig sind, wenn das für die ersten gilt: Da $\mu(\xi) \geq$ const. folgt aus Satz (6.6) dass das Produkt $u \cdot \pi$ definiert ist und gleich einer regulären Distribution. Aus Satz (7.3) folgt: $u \cdot \pi = \pi(x) u(x)$.

$$\Rightarrow \quad (\hat{u} * \hat{\pi})(\xi) = \widehat{(\pi(\cdot) u(\cdot))}(\xi) \qquad \Rightarrow$$

$$(Tu)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mu(\xi)\, \widehat{(\pi(\cdot) u(\cdot))}(\xi)\right](x)$$

Analog zeigt man die entsprechende Form für den Operator T^{-1} Wir zeigen nun, dass T^{-1} der inverse Operator zu T ist.

$$T(T^{-1}h) = T\left[\frac{1}{\pi(x)} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{h}}{\mu}\right)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\mu(\xi)\left(\frac{1}{\pi} \cdot \pi\, \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{h}}{\mu}\right)\right)\right] = h$$

$$T^{-1}(Tu) = T^{-1}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\mu(\xi)\, \widehat{(\pi u)}(\xi)\right)\right](x) =$$

$$= \frac{1}{\pi(x)} \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{(\pi u)}(\cdot)\right](x) = u(x) .$$

T und T^{-1} sind isometrisch:

$$\|Tu\|_{L_2} = \|\mu \cdot \widehat{u\pi}\|_{L_2} = \|u\|_{(\mu,\pi)}$$

$$\|T^{-1}h\|_{(\mu,\pi)} = \|\mu \cdot \widehat{(T^{-1}h \cdot \pi)}\|_{L_2} = \|T(T^{-1}h)\|_{L_2} = \|h\|_{L_2} .$$

Wir kommen jetzt zu einem der wichtigsten Sätze dieses Kapitels, nämlich zum Beweis, daß die Einbettung $H^{(\eta,\pi)} \to L_2$ vom Hilbert-Schmidt-Typ sein kann. Zu diesem Zweck betrachten wir den Operator T des letzten Satzes nicht mehr als Abbildung $H^{(\eta,\pi)} \to L_2$ sondern als unbeschränkten Operator in L_2. Das ist möglich, weil $H^{(\eta,\pi)} \subset L_2$ ist. Sein Definitionsbereich ist gleich $H^{(\eta,\pi)}$. Diesen Operator werden wir mit $\bar{T}$ bezeichnen, und seinen inversen mit $\bar{T}^{-1}$.

(7.8) Satz: Die Einbettung $H^{(\eta,\pi)} \to L_2$ ist vom Hilbert-Schmidt-Typ dann und nur dann wenn

$$\int\int \left| \left(\widehat{\frac{1}{\pi(\cdot)}}\right)(\xi-\eta) \right|^2 \frac{1}{\mu^2(\eta)}\, d\eta\, d\xi < \infty$$

Beweis: Die Eibettung $H^{(\eta,\pi)} \to L_2$ ist, nach Definition, vom Hilbert-Schmidt-Typ, wenn für jede orthonormierte Basis $\{u_i\}$ von $H^{(\eta,\pi)}$ gilt:

$$\sum_i \|u_i\|^2_{L_2} < \infty$$

Wegen der Isometrie von T^{-1} kann man eine zu $\{u_i\}$ zugeordnete orthonormierte Basis $\{h_i\}$ von L_2 finden, so daß $u_i = T^{-1} h_i$. Dann bekommt die obige Ungleichung folgende Form:

$$\sum_i \|u_i\|^2_{L_2} = \sum_i \|T^{-1}h_i\|^2_{L_2} = \sum_i \|\bar{T}^{-1}h_i\|^2_{L_2} = \sum_i \|\widehat{\bar{T}^{-1}h_i}\|^2_{L_2} < \infty$$

Daraus folgt: Die Einbettung $H^{(\eta,\pi)} \to L_2$ ist vom Hilbert-Schmidt-Typ, wenn der Operator

$$(\widehat{\bar{T}^{-1}h})(\xi) = \left[\left(\widehat{\frac{1}{\pi}}\right) * \frac{\hat{h}(\cdot)}{\mu(\cdot)} \right](\xi) \quad , h \in L_2$$

vom Hilbert-Schmidt-Typ ist.

Da $\widehat{\pi^{-1}}$ ein Integral-Operator in L_2 ist, ist die obige Forderung erfüllt, wenn der Kern

$$\left(\widehat{\frac{1}{\pi(\cdot)}}\right)(\xi-\eta)\frac{1}{\mu(\eta)} \in L_2 \times L_2 \qquad \text{ist, d.h.}$$

$$\int\int \left|\left(\widehat{\frac{1}{\pi(\cdot)}}\right)(\xi-\eta)\right|^2 \frac{1}{\mu^2(\eta)}\, d\xi\, d\eta < \infty$$

Daraus folgt die Behauptung.

(7.9) Folgerung: Sei $\pi^{-2}(x) \in L_2$ und $\mu^{-2}(\xi) \in L_2$ Dann ist die Einbettung $H^{(\mu,\pi)} \to L_2$ vom Hilbert-Schmidt-Typ.

Beweis: trivial.

(7.10) Satz: Sei $\mu(\xi)$ eine beliebige Gewichtsfunktion, und $\pi(x)$ oder $\pi^{-2}(x)$ erfülle die Vereinbarung. Dann ist S dicht in $H^{(\mu,\pi)}$.

Beweis: Für jedes $u \in H^{(\mu,\pi)}$ ist $\pi u \in H^{\mu}$. Da S dicht in H^{μ} ist, gibt es eine Folge $\{u_i\} \subset S$, so dass $\|u_i - \pi u\|_{\mu} \to 0$ für $i \to \infty$. Wenn die Gleichung $u_i = \pi v_i$ immer lösbar in S wäre, dann würde folgendes gelten:

$$\|u_i - \pi u\|_{\mu} = \|\pi(v_i - u)\|_{\mu} = \|v_i - u\|_{(\mu,\pi)} \to 0$$

für $i \to \infty$, d.h. $v_i \to u$ in $H^{(\mu,\pi)}$

was die Behauptung ist. Die Gleichung $u_i = \pi v_i$ ist immer in S lösbar, wenn $\pi(x)$ die Voraussetzung des Satzes erfüllt.

Einbettungssätze

(7.11) Satz: $H^{(\sigma,\pi)} \subseteq L_2$ topologisch, dann und nur dann, wenn der Operator

$$\Pi : L_2 \ni \hat{h} \longmapsto \int \left(\widehat{\frac{1}{\pi}}\right)(\xi-\eta)\,\frac{\hat{h}(\eta)}{\sigma(\eta)}\,d\eta \in L_2$$

stetig ist.

Beweis: $H^{(\sigma,\pi)} \subseteq L_2$ topologisch, ist äquivalent mit

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq \text{const.}\,\|u\|_{(\sigma,\pi)}^2 = \text{const.}\,\|Tu\|_{L_2}^2$$

für alle u aus einem in $H^{(\sigma,\pi)}$ und L_2 dichten Unterraum, z.B. S.

T ist der in Satz (7.7) definierte Operator. Setzt man $h = Tu$ in der oberen Gleichung und berücksichtigt, dass die Menge $\{h=Tu : u\in S\}$ dicht in S ist, so folgt:

$$\|T^{-1}h\|_{L_2}^2 \leq \text{const.}\,\|h\|_{L_2}^2 \qquad \forall\, h\in L_2$$

Man sieht aber, dass $\Pi\hat{h} = \widehat{T^{-1}h}$

Daraus folgt die Behauptung.

(7.12) Folgerung: Sei $\pi^{-1}(x)\in L_2$ und $\sigma^{-1}(\xi)\in L_2$

Dann ist $H^{(\sigma,\pi)} \subset L_2$ topologisch.

Beweis: In diesem Fall wird Π zu einem Integraloperator mit Hilbert-Schmidt-Kern, der ein stetiger Operator in L_2 ist.

Der Fall der Folgerung (7.12) ist zu speziell. Im Satz (7.11) sieht man nicht leicht, wann der Operator Π stetig ist. Deshalb beweisen wir einen anderen Satz, der für die Praxis ausreicht

(7.13) Satz: Sei $\pi(x) \geq \text{const.}$ und $\mu(\xi) \geq \text{const.} > 0$
Dann ist $H^{(\mu,\pi)} \subset L_2$ topologisch.

Beweis: $H^{(\mu,\pi)} \subset L_2$ topologisch ist äquivalent mit:

$$\|u\|^2_{L_2} \leq \text{const.} \|u\|^2_{(\mu,\pi)} \quad \forall\, u \in S$$

Da $\mu(\xi) \geq$ const., ist $\pi(x)u$ eine reguläre Distribution für alle $u \in H^{(\mu,\pi)}$, und nach Satz (7.3) hat die Form $\pi(x)u = \pi(x)u(x)$. Die obere Ungleichung bekommt die Form:

$$\int |u(x)|^2 dx \leq \text{const.} \int |(\widehat{\pi(\cdot)u(\cdot)})(\xi)|^2 \mu^2(\xi) d\xi \quad \forall\, u \in S$$

Das ist aber schon richtig weil:

$$\int |(\widehat{\pi(\cdot)u(\cdot)})(\xi)|^2 \mu^2(\xi) \geq \text{const.} \int |(\widehat{\pi(\cdot)u(\cdot)})(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \text{const.} \int |\pi(x)u(x)|^2 dx \geq \text{const.} \int |u(x)|^2 dx \,.$$

(7.14) Satz: $H^{(\mu,\pi)} \subset H^{v}$ topologisch
dann und nur dann wenn der Operator

$$\Pi : L_2 \ni \hat{h} \longmapsto \int \left(\widehat{\frac{1}{\pi}}\right)(\xi-\eta) \frac{\hat{h}(\eta)}{\mu(\eta)} v(\xi) d\eta \in L_2$$

stetig ist.

Beweis: $H^{(\sigma,\pi)} \subset H^{\nu}$ topologisch ist äquivalent mit:

$$\|u\|_{\nu}^2 \leq \text{const.} \|u\|_{(\sigma,\pi)}^2 \qquad \forall\, u \in S$$

Mit Hilfe des Operators T^{-1} des Satzes (7.7) nimmt die Ungleichung folgende Form an:

$$\|T^{-1}h\|_{\nu}^2 \leq \text{const.} \|h\|_{L_2}^2 \qquad \forall\, h \in L_2$$

Da aber $\|T^{-1}h\|_{\nu} = \|\pi \hat{h}\|_{L_2}$ ist, folgt die Behauptung.

Man kann wieder wie in (7.13) einen schwächeren, aber für die Praxis besseren Satz beweisen. Er lautet:

(7.15) Satz: Sei $\mu(\xi) \geq$ const. $\nu(\xi) \geq$ const. und $\pi(x) \geq$ const. Dann gilt:

$$H^{(\sigma,\pi)} \subset H^{\nu} \qquad \text{topologisch.}$$

Beweis: Der Beweis läuft ganz analog zu (7.13):

$$\int |(\widehat{u\pi})(\xi)|^2 \frac{\mu^2(\xi)}{\nu^2(\xi)}\, d\xi \geq \int |(\widehat{u\pi})(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \text{const.} \int |u(x)\pi(x)|^2 dx \geq \text{const.} \int |u(x)|^2 dx =$$

$$= \text{const.} \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \,.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(7.16) Satz: $H^v \subseteq H^{(\mu,\pi)}$ topologisch, dann und nur dann wenn der Operator

$$\Pi : L_2 \ni \hat{h} \longmapsto \int \mu(\xi) \frac{\hat{\pi}(\xi-\eta)}{v(\eta)} \hat{h}(\eta) d\eta \in L_2$$

stetig ist.

Beweis: Analog wie oben.

(7.17) Satz: Sei $\mu(\xi) \geq \text{const.}$ $\frac{\mu(\xi)}{v(\xi)} \leq \text{const.}$ und $\pi(x) \leq \text{const.}$ $\Rightarrow$

$H^v \subseteq H^{(\mu,\pi)}$ topologisch.

Beweis:

$$\int |(\widehat{\pi u})(\xi)|^2 \frac{\mu^2(\xi)}{v^2(\xi)} d\xi \leq \text{const.} \int |(\widehat{\pi u})(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \text{const.} \int |\pi(x)\, u(x)|^2 dx \leq \text{const.} \int |u(x)|^2 dx =$$

$$= \text{const.} \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \,.$$

VIII. ÜBER DIE SELBSTADJUNGIERTHEIT EINES SCHRÖDINGERSCHEN OPERATORS

Das Problem, wann ein Schrödingerscher Operator selbstadjungiert ist, ist in den letzten Jahren von vielen Mathematikern behandelt worden, z.B. Faddeev [5], Ikebe und Kato [11], E. Wienholtz [17], [18]. Die obigen Autoren, außer Faddeev, arbeiten im Konfigurationsraum, Faddeev dagegen im Impulsraum.

In dieser Arbeit werden wir aus folgenden Gründen im Impulsraum arbeiten: a) Man kann leicht den Definitionsbereich des Operators angeben, der ein Raum der Form H^{κ} ist, und b) Da bei uns alle Operationen zwischen Distributionen mit Hilfe ihrer Fourier-Transformation definiert sind, kann man leichter im Impulsraum arbeiten. Wir zeigen erstens, daß es einen Raum H^{κ} gibt, so dass $-\Delta+q(x)$ auf H^{κ} definiert und selbstadjungiert ist. Der Beweis ist analog dem von Faddeev. Der einzige Unterschied ist, dass Faddeev im Raum $H^{(1+|\xi|^2)}$ arbeitet und dass er bei einer Ungleichung das Verhalten von $q(x)$ im Unendlichen benutzt und wir eine Integralungleichung, was in der Tat dasselbe ist.

Am Ende zeigen wir, dass es keinen Raum der Form $H^{(\kappa,\pi)}$ gibt, bei dem $-\Delta$ selbstadjungiert ist.

Wir bringen zuerst einen Satz, mit Hilfe dessen wir die Selbstadjungiertheit des Operators $-\Delta+q(x)$ beweisen:

Satz (Kato, Rellich): A sei ein selbstadjungierter Operator im Hilbert-Raum H mit Definitonsbereich $\mathfrak{D}(A)$. B sei ein in $\mathfrak{D}(A)$ symmetrischer Operator, der folgende Ungleichung erfüllt:

$$\|Bu\| \leq \delta\|Au\| + c\|u\| \qquad \forall\, u \in \mathfrak{D}(A)$$

wobei $\delta < 1$ ist. Dann ist der Operator $\tilde{A} = A + B$ mit Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}(A)$ selbstadjungiert.

In unserem Fall werden wir als A den Operator $-\Delta$ mit $\mathfrak{D}(A) = H^{\mu}$ ansehen und als B den Operator der Multiplikation mit dem Potential $q(x)$. Wir werden zuerst die Gewichtsfunktionen $\mu(\xi)$ charakterisieren, die den Operator $-\Delta$ selbstadjungiert machen.

(8.1) Satz: Sei $H^{\mu} \subset L_2$ und $-\Delta$ in H^{μ} definiert. Dann gilt folgendes:
Der Operator $-\Delta = A$ mit $\mathfrak{D}(-\Delta) = H^{\mu}$ ist selbstadjungiert dann und nur dann, wenn:

$$\frac{\mu(\xi)}{|(|\xi|^2 \pm i)|} \leq \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{|(|\xi|^2+1)|}{\mu(\xi)} \leq \text{const.} \quad \text{für}$$

große $|\xi|$.

Beweis: A ist selbstadjungiert, wenn A in H^{μ} symmetrisch und zweitens, wenn $(A \pm i)H^{\mu} = L_2$ ist. Wir wählen ein solches $\mu(\xi)$ so dass $-\Delta H^{\mu} \subseteq L_2$ ist, d.h. dass $|\xi|^2 \hat{u}(\xi) \in L_2$ für alle $u(x) \in H^{\mu}$. Das ist möglich,

wenn $|\xi|^2/\mu(\xi) \leq$ const. für grosse $|\xi|$. Anders gesagt, wenn $(1+|\xi|^2)/\mu(\xi) \leq$ const. ist.

$$\Rightarrow \qquad (-\Delta \pm i) H^\mu \subseteq L_2$$

Wir zeigen jetzt, dass es für jedes $f(x) \in L_2$ ein $u(x) \in H^\mu$ gibt, so dass $(-\Delta \pm i) u(x) = f(x)$ gilt: Die Funktion $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\xi)/(|\xi|^2 \pm i)\right](x) = u(x)$ ist in H^μ enthalten, wenn

$$\frac{\mu(\xi)}{|\,|\xi|^2 \pm i|} \leq \text{const.} \quad \text{ist.}$$

In diesem Fall ist aber $(-\Delta \pm i) u(x) = f(x)$

Es bleibt noch die Symmetrie von $-\Delta$ in H^μ zu zeigen:

Aus der Ungleichung $(1+|\xi|^2)/\mu(\xi) \leq$ const. und aus dem Satz ( ) folgt,dass $H^\mu \subset C^2$. Ausserdem $-\Delta H^\mu \subset L_2$.

Daraus folgt:

$$(-\Delta u, v)_{L_2} = \int |\xi|^2 \hat{u}(\xi)\, \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int \hat{u}(\xi)\, |\xi|^2\, \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = (u, -\Delta v)_{L_2}$$

Die Ableitung ist hier im Distributionssinne zu verstehen. Da aber $H^\mu \subset C^2$, stimmt diese mit der gewöhnlichen überein.

(8.2) Satz: Sei $q(x)$ reell und die Multiplikation $q(x) H^\mu$ definiert und $q(x) H^\mu \subset L_2$. Dann ist der Operator

$$q : H^\mu \ni u(x) \longmapsto q(x) u(x) \in L_2$$

symmetrisch in H^μ .

Beweis:

$$(q(x)u(x), v(x))_{L_2} = \int \overline{\hat{v}(\xi)} \left[\int \hat{q}(\xi-\eta)\,\hat{u}(\eta)\,d\eta \right] d\xi =$$

$$= \int \hat{u}(\eta) \left[\int \overline{\hat{v}(\xi)}\,\hat{q}(\xi-\eta)\,d\xi \right] d\eta =$$

$$= \int \hat{u}(\eta) \left[\overline{\int v(\xi)\,\hat{q}(\eta-\xi)\,d\xi} \right] d\eta = (u, qv)_{L_2} .$$

Bemerkung: Die Schreibweise $q(x)u(x)$ ist nicht richtig. Gemeint ist $q(x)u(x) = \mathcal{F}^{-2}\left[\hat{q} * \hat{u}\right](x)$ was sich nicht immer als das Produkt der beiden Funktionen schreiben lässt, wenn $q(x)$ eine singuläre Funktion ist. Das ist kein Widerspruch zu dem Satz (7.3), da dort $\pi(x) \geq$ const. angenommen wird.

Wir kommen jetzt zum Hauptsatz dieses Paragraphen:

(8.3) Satz: Sei $\int \left[\int \left| \frac{\hat{q}(\xi-\eta)}{(1+|\eta|^2)^{1-\delta}} \right|^2 d\eta \right] d\xi < \infty$ für beliebig kleines $\delta > 0$. Dann ist der Operator $-\Delta + q(x)$ mit Definitionsbereich H^{μ}, wobei μ wie oben gewählt ist, ein selbstadjungierter Operator.

Beweis: $\|q(x)u\|^2 = \|(\hat{q}\hat{u})(\xi)\|^2 =$

$$= \int \left| \int \hat{q}(\xi-\eta)\,\hat{u}(\eta)\,d\eta \right|^2 d\xi =$$

$$= \int \left| \int \frac{\hat{q}(\xi-\eta)}{(1+|\eta|^2)^{1-\delta}} \cdot (1+|\eta|^2)^{1-\delta}\,\hat{u}(\eta)\,d\eta \right|^2 d\xi \leq$$

$$\leq \int \left[\int \left| \frac{\hat{q}(\xi-\eta)}{(1+|\eta|^2)^{1-\delta}} \right|^2 d\eta \right] d\xi \cdot \|(1+|\eta|^2)^{1-\delta}\,\hat{u}(\eta)\|^2$$

Es gilt aber folgende Ungleichung:

$$(1+x)^{1-\delta} \leq \delta x + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/\delta}$$

wobei $x>0$ und $0<\delta<1$ ist.

$$\Rightarrow \|(1+|\eta|^2)^{1-\delta}\,\hat{u}(\eta)\|^2 \leq \|(\delta|\eta|^2 + \left(\tfrac{1}{\delta}\right)^{1/\delta})\,\hat{u}(\eta)\|^2 =$$

$$= \|\delta|\eta|^2\hat{u}(\eta) + c(\delta)\,\hat{u}(\eta)\|^2 \leq \left[\delta\|-\Delta u\| + c(\delta)\|u\|\right]^2$$

Daraus folgt

$$\|q(x)u(x)\| \leq \delta\|-\Delta u\| + c(\delta)\|u\| \qquad \forall\ u \in H^n$$

Aus dieser Ungleichung, aus dem Satz von Kato-Rellich und aus Satz (8.1) folgt die Behauptung.

Wir zeigen weiter, dass man die obige Methode nicht anwenden kann, um zu zeigen, dass $-\Delta + q(x)$ in einem Raum der Form $H^{(m,\pi)}$ selbstadjungiert ist, da $-\Delta$ in $H^{(m,\pi)}$ nicht selbstadjungiert ist.

(8.4) Satz: Sei $H^{(m,\pi)} \subset L_2$ und $\pi(x) \neq 0$
Dann kann $-\Delta$ in $H^{(m,\pi)}$ nicht selbstadjungiert sein.

Beweis: Die Selbstadjungiertheit ist äquivalent mit der Gleichung

$$D := \{ \hat{f}(\xi) = (|\xi|^2 \pm i)\,\hat{u}(\xi) \;:\; u \in H^{(m,\pi)} \} = L_2$$

Wir werden erstens eine notwendige Bedingung finden, so dass $D \subseteq L_2$ und dann für den Fall $D \supseteq L_2$ und zeigen, dass sie unverträglich sind.

(i) $D \subseteq L_2 \Rightarrow \int |(|\xi|^2 \pm i)|^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad \forall u \in H^{(m,\pi)}$

Für jeden $u(x) \in H^{(m,\pi)}$ kann man aber ein $u_\pi(x) \in H^m$ finden, so dass $u_\pi(x) = u(x)\,\pi(x)$

$$\Rightarrow \int \left| \mathcal{F}\left[(-\Delta \pm i) \, \frac{u_\pi(x)}{\pi(x)} \right] \right|^2 d\xi =$$

$$= \int \left| \left[(-\Delta \pm i) \, \frac{u_\pi(x)}{\pi(x)} \right] \right|^2 dx < \infty \quad \forall \, u_\pi(x) \in H^m$$

Für reelle Funktionen $u_n(x) \in H^\mu$ folgt aus der letzten Ungleichung, daß $u_n(x)/\pi(x) \in L_2$ sein soll.
Da $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in H^\mu$ ist, folgt daraus, daß $\frac{1}{\pi(x)} < \text{const.}$ sein soll, weil sonst $\frac{1}{\pi(x)\sqrt{1+x^2}} \notin L_2$.
Das ist eine Bedingung, so daß $D \subseteq L_2$ gilt.

(ii) Wir zeigen jetzt, daß für $\pi(x) > \text{Const.} > 0$ und $\pi(x)$ monoton, die Beziehung $D_+ \supseteq L_2$ nicht möglich ist:
Nach Definition von D_+ muß für jedes $f(x) \in L_2$ die Funktion $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2+i}\right](x) \in H^{(\mu,\pi)}$ sein. Die Funktion $f(x) := (-\Delta+i)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L$

erfüllt diese Bedingung nicht und damit ist die Behauptung bewiesen.

IX. VERALLGEMEINERTE EIGENVEKTOREN EINES SCHRÖDINGERSCHEN OPERATORS

Die Funktionen $\mu(\xi)$ und $\pi(x)$ seien vorgegeben, so dass die Einbettung $H^{(\mu,\pi)} \to L_2$ vom Hilbert-Schmidt-Typ ist.

Bei der Definition eines verallgemeinerten Eigenvektors braucht man bekanntlich einen dichten Unterraum $\phi \subset H^{(\mu,\pi)}$, so dass die Einschränkung des Operators $-\Delta + q(x)$ auf ϕ eine stetige Abbildung von ϕ auf $H^{(\mu,\pi)}$ sein soll. Der Raum ϕ kann auch gleich $H^{(\mu,\pi)}$ sein. Die obere Forderung der Stetigkeit des Operators $-\Delta + q(x)$ wird, wie wir unten sehen werden, die erlaubten Potentiale einschränken. Als Raum ϕ nehmen wir den Raum $H^{(\nu,\pi^*)}$, wobei $\nu(\xi)$ und $\pi^*(x)$ so definiert sind, dass die Abbildung

$$-\Delta : H^{(\nu,\pi^*)} \longrightarrow H^{(\mu,\pi)}$$

stetig ist. Dann wird für dieselben Räume die Stetigkeit von $q(x)$ verlangt. Daraus werden sich Integralungleichungen ergeben, die die erlaubten Potentiale einschränken.

An Stelle von ϕ kann man nicht Räume vom Typ H^{ν} nehmen, weil es keine Gewichtsfunktionen $\nu(\xi)$ gibt, so dass $H^{\nu} \subset H^{(\mu,\pi)}$ ist, im Falle wo $\pi^{-2}(x) \in L_2$.
Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

(9.1) Satz: Der Operator $-\Delta : H^{(\nu,\pi^*)} \longrightarrow H^{(\mu,\pi)}$ ist stetig dann und nur dann wenn der Integraloperator

$$K : L_2 \ni \hat{h}(\xi) \longmapsto \int \mu(\xi)\,\hat{\pi}(\xi-\eta)\,\eta^2 \cdot \left[\int \left(\widehat{\frac{1}{\pi^*}}\right)(\eta-\rho)\,\frac{\hat{h}(\rho)}{\nu(\rho)}\,d\rho\right] d\eta \in L_2$$

stetig ist.

Beweis: Die Stetigkeit von $-\Delta$ ist äquivalent mit der Ungleichung

$$\|-\Delta u\|^2_{(\mu,\pi)} \leq \text{const.} \|u\|^2_{(\nu,\pi^*)} \quad \forall\, u \in H^{(\nu,\pi^*)}.$$

Da aber $\mu^{-2}(\xi) \in L_2$ und $\nu(\xi) \geq \text{const.}\, \mu(\xi)$ ist, folgt aus dem Satz (7.7), dass der Operator

$$T: H^{(\nu,\pi^*)} \ni u \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left[\nu(\xi)(\hat{u} * \hat{\pi}^*)(\xi)\right](x) \in L_2$$

ein isometrischer Isomorphismus zwischen den Räumen $H^{(\nu,\pi^*)}$ und L_2 ist. Sein inverser lautet:

$$T^{-1}: L_2 \ni h(x) \longmapsto \mathcal{F}^{-2}\left[\left(\left(\widehat{\frac{1}{\pi^*}}\right) * \frac{\hat{h}(\cdot)}{\nu(\cdot)}\right)(\xi)\right](x) \in H^{(\nu,\pi^*)}$$

Mit Hilfe dieses Operators nimmt die obere Ungleichung die Form

$$\|-\Delta u\|^2_{(\mu,\pi)} = \|-\Delta(T^{-1}h)\|^2_{(\mu,\pi)} \leq \text{const.} \|T^{-1}h\|^2_{(\nu,\pi^*)} = \text{const.} \|h\|^2_{L_2} \quad \forall\, h \in L_2$$

an, oder ausführlich geschrieben

$$\int \left| \int \mu(\xi)\hat{\pi}(\xi-\eta)\eta^2 \left[\int \left(\widehat{\frac{1}{\pi^*}}\right)(\eta-\rho) \frac{\hat{h}(\rho)}{\nu(\rho)}\, d\rho \right] d\eta \right|^2 d\xi \leq$$

$$\leq \text{const.} \|\hat{h}\|^2_{L_2} \quad \forall\, h \in L_2$$

Daraus folgt die Behauptung.

(9.2) Satz: Den Operator K des Satzes (9.1) kann man auch wie folgt, schreiben:

$$K: L_2 \ni \hat{u}(\xi)v(\xi) \longmapsto m(\xi)\mathcal{F}\left[-\pi(x)\Delta_x \frac{u(x)}{\pi^*(x)}\right](\xi) \in L_2$$

$$\forall\, u \in H^{v}$$

Beweis: Das bekommt man durch zweimalige Anwendung des Satzes (6.6).

(9.3) Satz: Seien $v(\xi)$, $m(\xi)$, $\pi(x)$ und $\pi^*(x)$ so gewählt, dass die Einbettung $H^{(\pi,\pi)} \longrightarrow L_2$ vom Hilbert-Schmidt-Typ ist, und der Satz (9.1) gilt. Dann ist der Operator

$$q(x): H^{(v,\pi^*)} \ni u(x) \longmapsto q(x)u(x) \in H^{(m,\pi)}$$

stetig, dann und nur dann wenn der Operator

$$K: L_2 \ni \hat{h}(\xi) \longmapsto \int m(\xi)\frac{1}{v(\eta)}\cdot\overbrace{\left(\frac{\pi(\cdot)q(\cdot)}{\pi^*(\cdot)}\right)}(\xi-\eta)\hat{h}(\eta)\,d\eta \in L_2$$

stetig ist.

Beweis: Der Beweis läuft ähnlich wie oben.

(9.4) Satz: Sei $f_\lambda(x)$ eine klassische Lösung der Gleichung

$$(-\Delta + q(x))f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

Sei noch $f_\lambda(x) \in H^{(\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi})}$ und die Funktionen $v(\xi)$, $m(\xi)$, $\pi(x)$, $\pi^*(x)$ und $q(x)$ so gewählt, dass die Forderungen der Sätze (9.1) und (9.2) erfüllt sind. Dann ist $f_\lambda(x)$ ein verallgemeinerter Eigenvektor.

Beweis: Zu zeigen ist, dass

$$(f_\lambda , (-\Delta+q(x))u) = \lambda (f_\lambda, u) \qquad \forall\, u \in H^{(4,\Pi^*)}$$

gilt:

$$(f_\lambda , -\Delta u) = \int \overline{\hat{f}_\lambda(\xi)}\, \xi^2\, \hat{u}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int \overline{(\widehat{-\Delta f_\lambda})(\xi)}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi = \lim_{M\to\infty} \int_{|x|\le M} \overline{(-\Delta f_\lambda(x))}\, u(x)\, dx$$

Die Ableitung $-\Delta f_\lambda(x)$ ist hier im Distributionssinne zu verstehen. Da aber $f_\lambda(x) \in C^2$ im gewöhnlichen Sinne ist, stimmt die gewöhnliche mit der verallgemeinerten Ableitung überein. Analog bekommt man

$$(f_\lambda , qu) = \lim_{M\to\infty} \int_{|x|\le M} \overline{f_\lambda(x)}\, q(x)\, u(x)\, dx$$

Aus den beiden Gleichungen folgt die Behauptung.

Bemerkung: Im Falle wo $q(x)$ singulär ist, muss man die letzte Gleichung lokal betrachten und dann zum Limes übergehen.

X. VERHALTEN DER VERALLGEMEINERTEN EIGENVEKTOREN EINES SCHRÖDINGERSCHEN OPERATORS IM UNENDLICHEN

Wie wir in Kapitel II gesehen haben, sind alle verallgemeinerten Eigenvektoren $f_\lambda(x)$ eines beliebigen Operators, der die dort erwähnten Forderungen erfüllt, Elemente eines Raumes $H^{(\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi})}$ wobei nach (7.10) $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\pi} \in L_2$ ist. Nach Definition des Raumes $H^{(\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi})}$ ist aber $\frac{f_\lambda(x)}{\pi(x)} \in H^{\frac{1}{\pi}}$, so dass man anstelle der regulären Distributionen $f_\lambda(x)$ des Raumes $H^{(\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi})}$ die entsprechenden $\frac{f_\lambda(x)}{\pi(x)} \in H^{\frac{1}{\pi}}$ untersuchen kann.

In dieser Arbeit ist das Problem des Verhaltens von $f_\lambda(x)$ im Unendlichen im allgemeinen nicht gelöst. Wir haben nur Teilaussagen bewiesen. Das haben wir mit Hilfe des folgenden, für uns wichtigen Satz, erreicht:

(10.1) Satz: Seien $u(x) \in H^\pi$, $\frac{1}{\pi} \in L_2$ und $f(x) \in H^{\frac{1}{\pi}}$ reguläre Distributionen. Dann gilt:

$$(f, u) = \int \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi = \lim_{M\to\infty} \int_{|x|\le M} \overline{f(x)}\, u(x)\, dx$$

Beweis: Nach Voraussetzung existiert das Integral $\int \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$ für alle $u \in H^\pi$. Da $\pi^{-1}(\xi) \in L_2$ ist, ist $\hat{u}(\xi) \in L_1 \quad \forall\, u \in H^\pi$.

Die Funktion $\hat{f}(\xi)$ ist gleich mit dem Limes von

$$\hat{f}_M(\xi) := \int_{|x|\le M} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \ ,$$

wobei der Limes im Distributionssinne zu verstehen ist.

Es wird jetzt gezeigt, dass

$$\int \overline{\hat{f}_M(\xi)}\,\hat{u}(\xi)\,d\xi = \int_{|x|\le M} \overline{f(x)}\,u(x)\,dx$$ gilt:

$$\int \hat{u}(\xi)\,\overline{\hat{f}_M(\xi)}\,d\xi = \int \hat{u}(\xi)\Big[\overline{\int_{|x|\le M} f(x)e^{2\pi i\xi\cdot x}dx}\Big]d\xi =$$

$$= \int_{|x|\le M} \overline{f(x)}\Big[\int \hat{u}(\xi)\,e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,d\xi\Big]dx = \int_{|x|\le M} \overline{f(x)}\,u(x)\,dx$$

Die Vertauschung der Integration ist deshalb erlaubt, weil $f(x)\in L_{1,loc}$ und $\hat{u}(\xi)\in L_1$ ist. Daraus folgt, dass der Limes von $\int_{|x|\le M}\overline{f(x)}\,u(x)\,dx$ für $M\to\infty$ existiert, und mit (f,u) übereinstimmt.

(10.2) Satz: Sei $f(x) = f_1(x)+if_2(x)\in H^M$
wobei $f_1(x)$, $f_2(x)$ reelle Funktionen und M beliebig.
Dann gilt: $f_1(x)$, $f_2(x)\in H^M$.

Beweis: Durch direktes Rechnen.

Mit Hilfe des Satzes (10.1) werden wir versuchen, das Verhalten von regulären Distributionen $f(x)\in H^{\frac{1}{\varepsilon}}$ im Unendlichen zu behandeln. Die Methode ist: Wir werden Funktionen $u(x)\in H^M$ finden, deren Abnahme im Unendlichen möglichst klein ist, und verlangen die Existenz des Integrals $\int \overline{f(x)}\,u(x)\,dx$

Daraus bekommt man einiges über das Verhalten von $f(x)$ im Unendlichen. Man stößt dabei auf zwei Schwierigkeiten: Die eine, die auch im eindimensionalen Fall vorkommt, hat mit dem Integrationsgebiet zu tun. Im Falle wo z.B. $f(x) = -f(-x) \in H^{\overline{F}}(\mathbb{R}^1)$ gilt, kann man nicht leicht zu Ergebnissen kommen.
Die andere Schwierigkeit kommt nur im mehrdimensionalen Fall vor. Man weiß nämlich nicht, ob aus $f(x_1, \dots, x_n) \in H^{\overline{F}}(\mathbb{R}^n)$ folgt:

$$f(x_1^\circ, \dots, x_{i-1}^\circ, x_i, x_{i+1}^\circ, \dots, x_n^\circ) \in H^{\overline{F}'}(\mathbb{R}^1)$$

für festgehaltene $x_1^\circ, \dots, x_{i-1}^\circ, x_{i+1}^\circ, \dots, x_n^\circ$ und welche Form $\mu'(\xi)$ hat.

Die erste Schwierigkeit lösen wir, indem wir zeigen, daß mit $u(x) \in H^{\mu}(\mathbb{R}^1) \subset L_2$ auch jede Einschränkung von $u(x)$ auf einem Intervall, deformiert nur in den Endpunkten, Element des Raumes $H^{\mu}(\mathbb{R}^1)$ ist.

Die zweite lösen wir mit Hilfe von zwei Sätzen aus der Arbeit von Volevich-Panevakh [16], die besagen, daß es Gewichtsfunktionen $\mu(\xi)$ gibt, so daß jede Funktion $u(x_1, \dots, x_n) \in H^{\mu}(\mathbb{R}^n) \subset L_2$ dasselbe Verhalten zeigt bezüglich jeder ihrer Veränderlichen.

Wir fanden mit dem ersten Problem:

(10.3) Hilfssatz: Sei $u_1, u_2 \in H^{\mu}(\mathbb{R}^1)$, $\mu(\xi) = \sqrt{1+\xi^2}$ und $\operatorname{supp} u_1 \cap \operatorname{supp} u_2$ = Nullmenge.

$$\Rightarrow \int \mu^2(\xi) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int \mu^2(\xi) \left[|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_2(\xi)|^2 \right] d\xi$$

wobei $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

Beweis:

$$\hat{u}(\xi) = \hat{u}_1(\xi) + \hat{u}_2(\xi) \quad \Rightarrow$$

$$|\hat{u}(\xi)|^2 = |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_2(\xi)|^2 + \sum_{i \neq j} \hat{u}_i(\xi)\,\overline{\hat{u}_j(\xi)} \quad \Rightarrow$$

$$\int \mu^2(\xi)\,|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int \mu^2(\xi)\left[\,|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_2(\xi)|^2\,\right] d\xi +$$

$$+ \sum_{i \neq j} \int \hat{u}_i(\xi)\,\overline{\hat{u}_j(\xi)}\,\mu^2(\xi)\,d\xi$$

Der letzte Summand ist nach dem Satz von Parseval gleich Null:

$$\int (1+\xi^2)\,\hat{u}_i(\xi)\,\overline{\hat{u}_j(\xi)}\,d\xi = \int u_i(x)\,u_j(x)\,dx + \int u_i''(x)\,u_j(x)\,dx = 0$$

da $\quad \operatorname{supp} u_j''(x) \cap \operatorname{supp} u_i(x) =$ Nullmenge.

(10.4) Satz: Sei $u(x) \in H^{\mu}(\mathbb{R}^1)$ u. $\mu(\xi) = \sqrt{1+\xi^2}$.
Seien noch Funktionen $\varphi_i(x)$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\varphi_i(x) \in C_S^{\infty}(\mathbb{R}^1)$

(ii) $\varphi_i(x) = 1$ auf einer abgeschlossenen beschränkten Menge V_i , gleich Null außerhalb einer sehr kleinen offenen Umgebung U_i von V_i und zwischen Null und Eins sonst.

(iii) Falls mehrere Funktionen $\varphi_i(x)$ an einer Stelle x ungleich Null sind, soll ihre Summe an dieser Stelle kleiner oder gleich Eins sein, d.h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^1$$

Dann gilt: Die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} u(x)\,\varphi_i(x)$ konvergiert in H^m .

Beweis: Zu jeder ganzen Zahl m kann man ein Element $v_m(x) \in H^m$ finden, so daß $u(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i(x) + v_m(x)$ und $\operatorname{supp} v_m(x) \cap \operatorname{supp} u_i(x)$ = Nullmenge für alle i , wobei $u_i(x) = u(x)\,\varphi_i(x)$.

Daraus und aus dem Hilfssatz folgt:

$$|\hat{u}(\xi)|^2 = \Big|\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(\xi)\Big|^2 + |\hat{v}_m(\xi)|^2 \quad \Rightarrow$$

$$|\hat{u}(\xi)|^2 \geq \Big|\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(\xi)\Big|^2$$

für jedes m .

$$\Rightarrow \Big\|\sum_{i=1}^{m} u_i(x)\Big\|_m^2 = \int \omega^2(\xi)\,\Big|\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i(\xi)\Big|^2 d\xi \leq$$

$$\leq \int \omega^2(\xi)\,|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_m^2 \quad .$$

Bemerkung: Funktionen mit solchen Eigenschaften gibt es nach der Theorie der Zerlegung der Einheit.

(10.5) Satz: Sei $f(x)$ eine reguläre Distribution aus $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^1)$, die als Funktion stetig ist, und

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x > a \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann sind alle Funktionen f_1, f_2, f_+, f_- Elemente von $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^1)$.

Beweis: Wir zeigen es erstens für den Fall der Funktion $f_1(x)$. Wir nehmen eine Überdeckung des Intervalls (a, ∞) und eine zugeordnete Zerlegung der Einheit. Dann hat man:

$$\left| \int \overline{f_1(x)}\, u(x)\, dx \right| = \left| \int \overline{f(x)} \sum_{i=1}^{\infty} u(x)\, \varphi_i(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \text{const.} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} u(x)\, \varphi_i(x) \right\|_{L^2} \leq \text{const.} \| u \|_{L^2} .$$

Für den Fall der Funktion $f_+(x)$ arbeiten wir wie folgt: Sei U_i eine zusammenhängende Menge, wobei $f(x) \geq 0$ ist, und V_i eine offene Umgebung von U_i. Dann kann man eine Funktion $\varphi_i(x) \in C_0^\infty$ finden, die auf U_i gleich 1 ist, ausserhalb V_i gleich Null und sonst zwischen Null und Eins. Die Funktionen $\varphi_i(x)$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes (10.3). Dann kann man den obigen Trick anwenden. Analog für die anderen Funktionen.

Aus den Sätzen (10.2) - (10.5) folgt, dass das Verhalten einer regulären Distribution $f(x) \in H^{\frac{1}{F}}(\mathbb{R}^1)$ im Unendlichen in allen vier Sektoren eines Koordinatensystems dasselbe ist. Falls $f(x)$ eine komplexe Zahl ist, gilt das gleiche für ihre reellen Komponenten. Deshalb braucht man nur eine reelle Funktion $f(x) \geq 0$ im Intervall $(0,\infty)$ zu betrachten. Wir betrachten jetzt einige spezielle Fälle im eindimensionalen Fall:

(10.6) Satz: Sei $f(x) \in H^{\frac{1}{F}}(\mathbb{R}^1)$ stetig, $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$ und ausserhalb eines Intervalls $\Delta = (0, N)$ monoton. Dann gilt:

$$f(x) \leq \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

Beweis: Die Funktion $u(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ ist quadratintegrierbar, was auch für jede ihrer Ableitungen zutrifft. Daraus folgt $u(x) \in H^{\mu}$ für jedes $\mu(\xi) \geq \text{Const.}$ Aus Satz (10.1) folgt, dass

$$\lim_{M \to \infty} \int_{0 \leq x \leq M} f(x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$$

existiert. Da aber $1/\sqrt{1+x^2} \notin L_1$ ist, existiert der Limes nur dann, wenn die Behauptung des Satzes richtig ist.

(10.7) Folgerung: Sei $f(x) \in H^{\frac{1}{\pi}}(\mathbb{R}^1)$, $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$. Dann gilt: Es gibt kein Intervall ausserhalb dessen $f(x) > k \neq 0$ ist.

Beweis: Wenn eine solche Funktion $f(x)$ existierte, so würde das Integral

$$\int_{0 \leq x \leq M} f(x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad , \quad M \to \infty$$

nicht konvergieren.

(10.8) Satz: Sei $f(x) \in H^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi})}(\mathbb{R}^1)$ eine stetige reguläre Distribution, die ausserhalb eines Intervalls $\Delta = (a, b)$ monoton ist. Sei noch $\pi(x) = \sqrt{1+x^2}$. Dann gilt:

$$|f(x)| \leq \text{Const.}$$

Beweis: Da $\frac{f(x)}{\pi(x)} \in H^{\frac{1}{\pi}}$ ist, folgt die Behauptung aus Satz (10.6).

Könnte man zeigen, dass die Behauptung des Satzes (10.6) für jede reguläre Distribution richtig ist, so würde man als Ergebnis haben: Jede reguläre stetige Distribution aus $H^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi})}$ mit $\pi(x) = \sqrt{1+x^2}$ ist beschränkt.

Allgemein würde man zu diesem Ergebnis kommen, wenn man folgendes beweisen könnte:

Es gibt eine Funktion $\pi(x)$, die Multiplikator in S ist,

$\pi^{-1}(x) \in H^m \subset L_2$ und

$$|f(x)| \leq \frac{c}{\pi(x)}$$

für jede reguläre stetige Distribution aus .

Umgekehrt kann man aber folgendes beweisen:

(10.9) Satz: Sei $f(x)$ eine stetige beschränkte Funktion. Dann ist $f(x) \in H^{(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})}$, wobei $\mu(\xi) \geq \text{const.}$ und $\pi^{-1}(x) \in L_2$.

Beweis: $\frac{f(x)}{\pi(x)} \in L_2 \Rightarrow (\widehat{\frac{f}{\pi}})(\xi) \in L_2$

für alle $\mu(\xi) \geq \text{const.}$

(10.10) Folgerung: Fordert man, dass jede Konstante eine Distribution in $H^{(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})}$ definiert, wobei $\mu(\xi) \geq \text{const.}$ so muss $\pi^{-1}(x) \in L_2$ sein.

Wir untersuchen jetzt, welche Bedingungen die Funktionen $\pi(x)$ und $\mu(\xi)$ erfüllen müssen, wenn man verlangt, dass die Eigenlösungen des Impuls- und des Ortsoperators in $H^{(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})}$ enthalten sind. Die Ergebnisse formulieren wir in Sätze:

(10.11) Satz: Die ebene Welle $e^{2\pi i x \cdot \xi}$ ist in $H^{(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})}$ enthalten, wenn

$$\int \frac{1}{\mu^2(\xi)} \left| (\widehat{\frac{1}{\pi}})(\xi - \xi') \right|^2 d\xi < \infty$$

ist.

Beweis:

$$\mathcal{F}\left(\frac{e^{2\pi i x\cdot\xi'}}{\pi(x)}\right)(\xi) = \left(\widehat{\frac{1}{\pi(\cdot)}}\right)(\xi-\xi') \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{\mu^2(\xi)}\left|\left(\widehat{\frac{1}{\pi}}\right)(\xi-\xi')\right|^2 d\xi < \infty \quad .$$

(10.12) Satz: Sei $\pi(x) \geq$ const., $\mu(\xi) \geq$ const. Dann gilt folgendes: Die δ-Funktion $\delta(x)$ ist in $H^{(\frac{1}{\mu},\frac{1}{\pi})}$ enthalten, dann und nur dann wenn $\frac{1}{\mu} \in L_2$ ist.

Beweis: $\delta \in H^{(\frac{1}{\mu},\frac{1}{\pi})} \Leftrightarrow |(\delta, v)| \leq \text{Const.} \|v\|_{(\mu,\pi)} \quad \forall\, v \in H^{(\mu,\pi)}$.

Wegen der Isometrie von $H^{(\mu,\pi)}$ und H^{μ} kann man diese Ungleichung in folgender Form schreiben:

$$\pi(0)|(\delta, v)| = \pi(0)\,|v(0)| = |u(0)| \leq \text{Const.}\,\|u\|_{\mu} \quad \forall\, u \in H^{\mu}.$$

d.h. $\delta(x) \in H^{(\frac{1}{\mu},\frac{1}{\pi})} \Leftrightarrow \delta(x) \in H^{\frac{1}{\pi}}$.

Das letzte ist aber äquivalent mit der Behauptung des Satzes.

Man sieht aus den letzten Sätzen (10.10) - (10.12), dass man das Raumtripel auch durch andere Forderungen, die eine physikalische Bedeutung haben, charakterisieren kann. Wir diskutieren aber das Problem nicht weiter.

Wir haben uns bis jetzt nur mit eindimensionalen Fällen beschäftigt. Wir tun es unten mit dem mehrdimensionalen Fall. Wir nehmen folgendes Raumtripel:

$$H^{(\mathfrak{M},\Pi)}(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n) \subset H^{(\frac{1}{\mathfrak{M}},\frac{1}{\Pi})}(\mathbb{R}^n)$$

Da es keinen Grund gibt, dass sich ein Teilchen in irgendeiner Richtung anders verhält als die anderen, fordern wir, dass

$\Pi_0(x_1,\dots,x_n)=\pi(x_1)\cdots\pi(x_n)$ und $\mathfrak{M}_0(\xi_1,\dots,\xi_n)=\mu(\xi_1)\cdots\mu(\xi_n)$.

wobei $\mu^{-1}(\xi_i)\in L_2$ und $\pi^{-1}(x_i)\in L_2$ für alle i. Dass das Verhalten im Unendlichen in diesem Fall für alle Veränderlichen dasselbe ist, geben uns die Sätze (6.1) und (6.2) aus der Arbeit von Volevich-Paneyakh [16], die wir ohne Beweis bringen. Zuerst aber einige Definitionen:

Sei $n>m$. Unter $\mathbb{R}^m$ werden wir den Unterraum von $\mathbb{R}^n$ verstehen, dessen Komponenten $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^n$ gleich Null sind, und $\mathbb{R}^{n-m}$ den orthogonalen zu $\mathbb{R}^m$, d.h. den Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit: $x^1=x^2=\cdots=x^m=0$.

Die Punkte von $\mathbb{R}^m$ werden wir mit $x'=(x^1,\dots,x^m)$ bezeichnen, und die von $\mathbb{R}^{n-m}$ mit $x''=(x^{m+1},\dots,x^n)$. $x=(x',x'')$ soll den zugeordneten Punkt von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Mit Σ_α^m werden wir die m-dimensionale Ebene verstehen, deren Punkte folgende Form haben: $x=(x',\alpha)$.

Zu jeder Funktion $u(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ordnen wir ihre Einschränkung

$u(x',\alpha) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ auf die Ebene Σ_α^m zu. Wenn diese Zuordnung als Operator von $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ stetig ist, wobei $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ der Schwartzsche Distributionsraum ist, dann kann man ihn auf den ganzen Raum $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung bezeichnen wir mit R^α. Die für uns brauchbaren Sätze lauten jetzt:

Satz: Für die Existenz der Einschränkung jeder Distribution $u \in H^\mu$ auf die Ebene Σ_α^m ist notwendig und hinreichend, dass das Integral $\int \mu^{-2}(0,\xi'')d\xi''$ konvergiert. Die Elemente $R^\alpha u$ sind in $H^{\mu'}$ enthalten, wobei

$$\mu'^{-1}(\xi') := \left(\int \mu^{-2}(\xi',\xi'')d\xi'' \right)^{1/2}$$

ist, und es gilt:

$$\| u(x',\alpha)\|_{\mu'}^2 = \| R^\alpha u\|_{\mu'}^2 \le (2\pi)^{m-n} \|u\|_\mu^2 .$$

Der zweite Satz lautet:

Satz: Für jede Funktion $\varphi(x') \in H^{\mu'}(\mathbb{R}^m)$, gibt es eine Funktion $u \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$ - die Fortsetzung von $\varphi(x')$ auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ - so dass:

(i) $R^0 u_\varphi = \varphi(x')$

(ii) $\| u_\varphi \|_\mu = (2\pi)^{\frac{m-n}{2}} \| \varphi \|_{\mu'}$

$$u_\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int e^{ix\cdot\xi} \mu'^{-2}(\xi') \mu^{-2}(\xi) \hat{\varphi}(\xi') d\xi =$$

$$= \varphi(x') \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mu_2^2(\xi'')} \right](x'') .$$

Die letzte Gleichung gilt, falls $\mu(\xi',\xi'') = \mu_1(\xi')\mu_2(\xi'')$

Die Behauptung des Satzes hat zur Folge, dass der Wertebereich des Operators R der ganze Raum $H^{(m',\pi')}(\mathbb{R}^n)$ ist und dass es einen beschränkten rechtsinversen Operator $R^{-1}: H^{(m',\pi')}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{(m,\pi)}(\mathbb{R}^n)$ gibt.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir einen Satz, der das Verhalten der regulären Distributionen $f(x_1, \dots, x_n) \in H^{(\frac{1}{m}, \frac{1}{\pi})}$ auf das Verhalten einer eindimensionalen Distribution $f_i(x_i) \in H^{(\frac{1}{m}, \frac{1}{\pi})}$ reduziert.

(10.13) Satz: Sei $m_0(\xi) = m(\xi_1) \cdots m(\xi_n)$ und $\pi_0(x) = \pi(x_1) \cdots \pi(x_n)$. Dann ist jede reguläre stetige Distribution $f(x_1, \dots, x_n) \in H^{(\frac{1}{m_0}, \frac{1}{\pi_0})}$ bei festgehaltenen $x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ eine Distribution aus $H^{(\frac{1}{m}, \frac{1}{\pi})}(\mathbb{R}^1)$.

Beweis: Aus den letzten Sätzen bekommt man:

$$|(f, u_\varphi)| \leq \text{const} \cdot \|u_\varphi\|_{(m,\pi_0)} = \text{const} \cdot (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \cdot \|\varphi\|_{(m,\pi)} \quad \forall\ \varphi \in H^{(m,\pi)}(\mathbb{R}^1)$$

wobei u_φ die Fortsetzung von φ auf $\mathbb{R}^n$ ist. Ausführlicher geschrieben lautet das:

$$|(f, u_\varphi)| = \Big| \lim_{M \to \infty} \int_{|x| \leq M} f(x_1, \dots, x_n)\, \varphi(x_i)\, \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{m^2(\xi_1) \cdots m^2(\xi_{i-1}) m^2(\xi_{i+1}) \cdots m^2(\xi_n)} \Big] (\cdot$$

$$\cdot (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\, dx \Big| =$$

$$= \Big| \lim \int \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{m^2(\xi_1) \cdots m^2(\xi_{i-1}) \cdot m^2(\xi_{i+1}) \cdots m^2(\xi_n)} \Big] (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \int f(x_1, \dots, x_n)\, \varphi(x_i)\, dx_i \Big\} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \Big| \leq$$

$$\leq \text{const} \cdot \|\varphi\|_{(m,\pi)} \cdot$$

Da das innere Integral für alle $\varphi \in H^{(m,\pi)}(R^1)$ existieren muß, folgt dass das Verhalten von $f(x_1, \dots, x_n)$ bezüglich der Koordinate x_i dasselbe sein muss wie das entsprechende einer Veränderlichen.

LITERATUR

1. J.-P. Antoine: Dirac Formalism and Symmetry Problems in Quantum Mechanics I. General Dirac Formalism, J. Math. Phys. 10, 53-69, (1969)

2. J.-P. Antoine: Dirac Formalism and Symmetry Problems in Quantum Mechanics II. Symmetry Problems, J. Math. Phys. 10, 2276-90, (1969)

3. J.M. Berezanskii: Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, Translations of Mathematical Monographs, vol.17 AMS, Providence, Rhode Island,(1968)

4. D.I. Blochinzew: Grundlagen der Quantenmechanik, Frankfurt/M - Zürich, (1966)

5. L.D. Faddeev: Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in Quantum Scattering Theory, Jerusalem,(1965)

6. C. Foias: Décompositions en Opérateurs et Vecteurs Propres. I. Etudes de ce Décompositions et leurs Rapports avec les Prolongements des Opérateurs. Rev. roumaine math. pur. appl. 7, 241-282, (1962)

7. C. Foias: Decompositions en Opérateurs et Vecteurs Propres. II. Eléments de Théorie Spectrale dans les Espaces Nucléaires. Rev. roumaine math. pur. appl. 7, 571-602, (1962)

8. I.M. Gelfand-G.E. Schilow: Verallgemeinerte Funktionen Bd. I, II, II, Berlin, (1967 - 1969)

9. I.M. Gelfand-N.J. Wilenkin: Verallgemeinerte Funktionen Bd. IV. Berlin, (1964)

10. Y. Hirata - H. Ogata: On the Exchange Formula for Distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 22, 147-152, (1958)

11. T. Ikebe - T. Kato: Uniqueness of the Self-adjoint Extension of Singular Elliptic Differential Operators, Arch. Rat. Mech. Analysis, 9, 77-92, (1962)

12. M. Itano: On the Theory of the Multiplicative Products of Distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 30, 151-181, (1966).

13. J.E. Roberts: The Dirac Bra and Ket Formalism, J. Math. Phys. 7, 1097-1104, (1966)

14. L. Schwartz: Théorie des Distributions, Paris, (1966)

15. R. Shiraishi - M. Itano: On the Multiplicative Products of Distributions, J. Sci Hiroshima Univ. Serv. A, 28, 223-235 (1964)

16. L.R. Volevich - B.P. Paneyakh: Certain Spaces of Generalized Functions and Embedding Theorems, Usp. Math. Nauk 20, 1-73, (1965)

17. E. Wienholtz: Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Math. Ann. 135, 50-80, (1958)

18. E. Wienholtz: Bemerkungen über elliptische Differentialoperatoren, Arch. Math. 10, 126-133, (1959)

Herrn Professor E. Wienholtz danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein beständiges Interesse, sowie für zahlreiche anregende Diskussionen.

Herrn Prof. H. Kastrup schulde ich Dank für die Bereitschaft, diese mathematisch ausgerichtete Arbeit zu fördern und als Dissertation des Physik Departments der Universität München anzuerkennen.

LEBENSLAUF

23.10.1939	geboren in Dadia/Griechenland
1954 - 1960	Besuch des sechsklassigen Humanistischen Gymnasiums in Ferrai/Griechenland
1960	Reifeprüfung
1960 - 1963	Studium der Physik an der TH München
22.3.1963	Vordiplom TH München
1963 - 1967	Studium der Physik an der Universität München
30.6.1967	Diplomprüfung an der Universität München
Seit Febr. 1968	Doktorand an der Universität München
4.11.1968	Eheschließung
28. 4.1969	Geburt meines Sohnes